Mª Dolores de Prada Vicente

EL CONCEPTO DE FUNCIÓN: DIFICULTADES EN SU APRENDIZAJE

ANÁLISIS DE UNA EXPERIENCIA CON ESTUDIANTES DE ENSEÑANZA MEDIA

Monografías I.E.P.S.
Nº 20

EL CONCEPTO DE FUNCIÓN: DIFICULTADES EN SU APRENDIZAJE

ANÁLISIS DE UNA EXPERIENCIA CON ESTUDIANTES DE ENSEÑANZA MEDIA

Mª Dolores de Prada Vicente
Catedrática de Matemáticas de Bachillerato
e Inspectora de Educación

i.e.p.s.
Instituto de Estudios
Pedagógicos Somosaguas
Vizconde de Matamala, 3
28028 Madrid
Tlno. 91/356.44.04

Depósito Legal: M-4544-1996

PRESENTACIÓN

Las nuevas matemáticas, han intentado a partir de los años 60 clarificar algunos conceptos matemáticos a través de definiciones impecables, presentadas de manera, (eso se creía), que los estudiantes no tuvieran más remedio que comprenderlas.

Uno de estos conceptos depurados y presentados matemáticamente fue el de función. El problema es que el aprendizaje de las matemáticas depende de algo más que de la exactitud de la definición. La forma de aprender de los alumnos lleva la impronta de sus experiencias personales, de su estructura cognitiva y de su propio estilo de aprendizaje.

La experiencia acumulada demuestra que los alumnos pueden repetir definiciones matemáticas impecables y al mismo tiempo haber formado una imagen mental distinta que se pone en conflicto con la definición aprendida.

El objeto del trabajo que presentamos es averiguar en la medida de lo posible las imágenes mentales que tienen nuestros alumnos sobre el concepto de función y la relación que existe entre éstas y su definición formal aprendida a través de la enseñanza y los textos escolares.

Esta imagen mental que el alumno no explicita y muchas veces evoca inconscientemente se puede descubrir a través de los errores que comete en la transferencia del concepto a situaciones concretas.

Para intentar buscar estos prototipos mentales, en relación con la noción de función, se ha llevado a cabo una investigación (que presentamos en este documento) en 4 centros de Madrid capital, mediante la aplicación de un cuestionario a 180 alumnos de 3º de BUP, COU y 2º de Bachillerato LOGSE.

La codificación de las contestaciones a este cuestionario nos ha permitido detectar las representaciones mentales del concepto de función y los errores que las falsas concepciones llevan emparejados y así poder diseñar estrategias didácticas encaminadas a la sustitución progresiva de estos errores por buenas teorías.

Agradecemos la valiosa colaboración que nos han prestado para el desarrollo de esta experiencia los Institutos de Bachillerato Isabel la Católica, Príncipe Felipe, Dámaso Alonso y el Centro de Educación Secundaria San Fernando, todo ellos de Madrid capital.

INDICE

EL CONCEPTO DE FUNCIÓN Y SUS DIFICULTADES PARA ESTUDIANTES DE ENSEÑANZAS MEDIAS.

I. MARCO TEÓRICO Y CONCEPTUAL

Introducción

Este estudio se basa en una investigación realizada con alumnos de 3º de BUP. COU y 2º de Bachillerato LOGSE sobre el concepto que tienen de una función después de haberlo trabajado durante 5 o 6 años.

Partimos, en una primera parte, de la evolución del concepto de función a través de los tiempos que nos señala hitos importantes en la elaboración de este concepto por los matemáticos. El estudio de las contestaciones de los alumnos al test propuesto en la experiencia que presentamos permitirá situar la etapa en la que se encuentran estos alumnos respecto a la evolución histórica del concepto de función.

En la segunda parte tratamos del diseño y el desarrollo de la experiencia. El análisis de los resultados de esta parte nos conduce al análisis de errores que forma la parte tercera y, finalmente; al establecimiento de las conclusiones.

El objetivo final de la investigación es llegar a encontrar las diferencias entre el concepto que los alumnos han estudiado en los libros y la aplicación práctica que hacen de este concepto, es decir, las diferencias entre el concepto definición y el concepto imagen. Ello nos llevará a analizar también los errores que muestran los alumnos, que proporcionan un material insustituible para diagnosticar la situación y elaborar estrategias didácticas para la mejora en la enseñanza matemática de este concepto.

Evolución del concepto de función

El concepto de función ha sido una de las ideas fundamentales de la matemática moderna que ha penetrado en casi todos los campos del saber y puede ser aprovechado en una variedad de contextos. También se ha manifestado como uno de los conceptos más difícil de enseñar, debido a su complejidad y a las numerosas subnociones asociadas con este concepto.

La idea de función ha sufrido una interesante evolución a lo largo de la historia. Se la ha considerado como:

una curva descrita por un móvil (s. XVII) ,
una expresión analítica hecha de variables y constantes,
una representación gráfica,
una máquina input-ouput que permite relaciones mas generales,

hasta llegar al moderno concepto de función como una correspondencia unívoca entre dos conjuntos o, más formalmente, como un subconjunto del producto cartesiano de AxB tal que para cada $a \in A$ hay exactamente un $b \in B$, tal que $(a,b) \in f$.

Freudenthal (1983) considera que la evolución del concepto de función se ha producido desde una noción de dependencia dinámica a una noción de teoría de conjuntos estática, o desde una noción operacional a una noción estructural.

Según *Cañón (1993),* la evolución del concepto de función pasa por tres etapas:

• La primera se extiende desde las más antiguas expresiones de correspondencias numéricas o geométricas hasta la modernidad. En esta etapa no aparece la palabra función, pero el concepto de relación entre conjuntos está presente en las tablas, en el cálculo de proporciones y en los primeros intentos de los griegos de hacer expresable el cambio mediante el establecimiento de la relación entre dos cosas. En toda la Edad Media, el lenguaje que expresa las relaciones de funcionalidad es el lenguaje verbal y el geométrico.

• Descartes, Newton y Leibnitz son los representantes de la segunda etapa. El lenguaje verbal y geométrico da paso al lenguaje algebraico para expresar las relaciones de funcionalidad y en este sentido se puede considerar a Descartes como el padre del concepto abstracto de función. Newton y Leibnitz lo desarrollan con su calculo infinitesimal. En el libro de Euler "Introductio in Análisis infinitorum", aparece la siguiente definición de función :*"Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de una manera arbitraria de aquella cantidad variable y de números, o sea de cantidades constantes"*. Por tanto una función es una expresión compuesta de potencias, logaritmos, razones trigonométricas, y de la variable x, sin que sea necesario expresar claramente cuáles pueden ser estas combinaciones. Esta definición de función es demasiado restrictiva para las necesidades de la física matemática, en concreto no puede satisfacer a las *"curvas mecánicas"* (aquellas curvas cualesquiera que son trazadas con referencia a un sistema de coordenadas y para las cuales no se conocen las ecuaciones que las representan).

• En la tercera etapa, el concepto de función hubo de pasar por un proceso de generalización y clarificación de la mano de Fourier y Dirichlet (1805-1859). También Lobachewsky llegó en esta época al mismo concepto de función. Dirichlet admitirá, dentro del concepto de función, las curvas discontinuas, a trozos, sin ecuación conocida, etc. Lo importante para caracterizar el concepto no es la ecuación que determina la correspondencia entre variables; lo que importa es la correspondencia misma. La teoría de conjuntos ha permitido expresar la definición general de función de la manera en que hoy la conocemos.

En la obra citada anteriormente, *Freudenthal* considera que son dos las características más desarrolladas del moderno concepto de función: su naturaleza arbitraria y la univocidad.

La naturaleza arbitraria hace relación a que las funciones no tienen que exhibir ninguna regularidad, ni ser descritas mediante una expresión específica o un gráfico; tampoco tienen que estar definidas en conjuntos específicos: pueden estarlo en cualquier conjunto de objetos y éstos no tienen necesariamente que ser números.

La univocidad indica que a cada elemento del conjunto dominio sólo le puede corresponder un único elemento del conjunto rango. Esta característica no fue requerida en los comienzos Freudenthal atribuye este requerimiento al deseo de los matemáticos de hacerlas mas manejables.

Ruiz (1993), acaba de presentar una tesis doctoral, en la Universidad de Granada sobre "Las concepciones de los alumnos de Secundaria sobre el concepto de función". En dicha tesis la autora analiza las diferentes concepciones asociadas a la evolución histórica del concepto de función. Distingue 7 concepciones colectivas o epistemológicas:

1. *Identificación de ciertas regularidades en fenómenos sujetos al cambio: relación entre cantidades de magnitudes variables.*
   Se desarrolla desde la matemática pre-helénica perdurando durante cierto tiempo.
2. *Razón o proporción.*
   Se desarrolla desde la matemática helénica, perdurando con matemáticos tales como Oresme y Galileo.
3. *Gráfica (visión sintética).*
   Comienza en las escuelas de Oxford y París en el s. XIV y tuvo su representante más significativo en Oresme.
4. *Curva (analítica-geométrica).*
   Surge a través de los trabajos de Descartes y Fermat (s. XVI-XVII), y permanece en nuestros días.

5. *Expresión analítica.*
   Comienza con los estudios de Descartes y Fermat, prosigue con los trabajos mecanicistas y geométricos de Newton y Leibniz (s. XVIII) en los inícios del Calculo Infinitesimal, y continua con los de Bernouilli, Lagrange y Euler (s.XVII-XVIII), creando poco a poco una disciplina autónoma: el análisis matemático.
6. *Correspondencia arbitraria: Aplicación.*
   Comienza desde los últimos trabajos de Euler sobre funciones arbritarias (s.XVIII), continua en el s.XIX con los de Fourier sobre series trigonométricas, y se consolida con los trabajos sobre los números reales de Cauchy, Dedekind, Lobachevsky, Riemman o Dirichlet, entre otros.
7. *Función como terna f= (F,X,Y).*
   A partir de la estructuración sistemática y lógica de la teoría de conjuntos, principalmente cuando ésta se tomó como base y fundamento de toda la matemática (finales del s. XIX y primeras décadas del s. XX).

La evolución histórica del concepto de función, antes presentada, nos puede iluminar acerca de las dificultades que actualmente nuestros estudiantes de Enseñanzas Medias tienen en comprender y aplicar este concepto, clave en las matemáticas de estos niveles, debido a los conflictos que se pueden producir entre sus "conceptos imagen" y el "concepto definición".

Investigaciones sobre la representación mental del concepto de función en los estudiantes de Enseñanzas Medias.

Son bastantes las investigaciones que en la última década se han realizado en torno a la comprensión del concepto de función.

Markovits y colaboradores (1986) encontraron en sus investigaciones que los estudiantes aprenden diversas representaciones de la misma función (verbalmente, mediante flechas, de forma algebraica, gráficamente) y pueden hacer traslaciones de una forma de representación a otra. Encontraron que la concepción de los estudiantes de 9° grado (1° de BUP) sobre la función era lineal, ya que la mayoría de las funciones que dibujaban los estudiantes se componían de trazos rectos.

Eisenberg (1991) descubrió que, en general, existe una fuerte tendencia en los estudiantes para concebir las funciones *algebraicamente* más que *visualmente*. El autor concluye que esto puede ser debido a que lo visual es más difícil de comprender, mas difícil de enseñar y más rechazado por la mentalidad matemática de los profesores. Clements llegó a probar que el alumno bueno en matemáticas puede pensar visualmente pero tiene cierta tendencia a no hacerlo; y Krutetskii llegó a afirmar que la habilidad para visualizar no es un pre-requisito del talento matemático.

Even (1993), que realizó una investigación sobre el concepto de función entre aspirantes a profesores de Secundaria, concluía que estos profesores tienen un concepto imagen limitado y similar a los del siglo XVIII.

Para destacar el papel jugado por la representación mental de los conceptos, *Vinner* (1983) introdujo los términos de *"concepto imagen"* y *"concepto definición"*. Define el *"concepto imagen"* como la estructura cognitiva asociada con el concepto que incluye todas las representaciones mentales con las propiedades asociadas y procesadas. El *"concepto definición"* es el enunciado usado por los alumnos para hacer explícito el concepto

Estudios sobre el comportamiento de estudiantes de distintos países *(Dreyfus y Eisenberg 1987, Lovell 1971, Marnyanski 1975, Vinner 1983),* han encontrado que muchos de esos estudiantes no han adquirido el moderno concepto de función y, aunque hayan estudiado en los textos escolares la definición basada en la teoría de conjuntos, tienen un concepto imagen prototípico que dista mucho de esa definición. Así, de las conclusiones de estos estudios se desprende que, generalmente, el concepto imagen de los alumnos sobre función es el de algo que puede representarse mediante una recta o una curva bastante regular y familiar; esperan que las funciones exhiban gráficos "bonitos", "regulares", "razonables", y que todas las funciones puedan expresarse mediante una fórmula. Muchos estudiantes no incluyen en su concepto de función las funciones constantes, aquellas que tienen discontinuidades, las funciones a trozos, o las funciones obtenidas por composición.

Malik (1980) esclareció en un estudio que la definición moderna de función, como subconjunto de un producto cartesiano, representa una estructura diferente de pensamiento de aquella que está basada en el estudio de la función tradicional que enfatiza la elación entre una variable dependiente y otra independiente

Sierpinska (1988) se centró en la moderna definición de función (aquella se basa en la existencia de la terna (X,Y,F) y afirmó:

> *"La principal concepción de una función es que es una relación entre magnitudes variables. Si esto no se desarrolla, las representaciones tales como ecuaciones y gráficas pierden su significado y llegan a aislarse unas de otras. Introducir las funciones a los jóvenes estudiantes a través de su elaborado concepto moderno teórico-conjuntista es un error didáctico y una inversión antididáctica".*

Ruiz (1993) en una investigación realizada con alumnos de 2°, 3° y COU de la provincia de Jaén, sobre concepciones de estos alumnos en torno al concepto de función, ha encontrado inconsistencias entre la definición que dan de función y los ejemplos que proponen, inconsistencias entre el status declarativo expresado en sus definiciones y el status argumentativo expresado en sus justificaciones, inconsistencias en el reconocimiento de una misma función en forma gráfica y algebraica, inconsistencias en el reconocimiento de funciones de forma implícita y explícita, inconsistencias en la consideración de fórmulas y funciones, e inconsistencias entre las representaciones gráficas y algebraicas en una misma situación de variación.

La investigación que presentamos a continuación, realizada con alumnos de 3° de Bachillerato COU y 2° de Bachillerato LOGSE, de varios Institutos de Madrid, puede servir de contraste o ratificación de algunos de estos resultados.

II. DESARROLLO DE LA INVESTIGACIÓN.

Objetivos

1. Analizar las diferencias entre el concepto de función que los alumnos han estudiado y la aplicación que hacen de este concepto en la práctica, es decir, examinar si hay diferencias y cuáles son, entre su concepto imagen y su concepto definición.

2. Estudiar los errores que cometen en sus contestaciones y arbitrar medidas didácticas eficaces para construir buenas teorías a partir de estos errores.

Descripción de la muestra

Se ha realizado la investigación con 180 alumnos de los cursos 3° de BUP, 2° de Bachillerato LOGSE y COU, en 3 Institutos y un Centro Privado de Madrid Capital. Los Institutos son: I.B. Isabel la Católica, I.B. Dámaso Alonso e I.B. Príncipe Felipe; el Centro Privado es el Colegio San Fernando de la Comunidad Autónoma.

El I.B. Isabel la Católica, atiende una población estudiantil de 2600 alumnos provenientes de diversos zonas de Madrid capital y barrios periféricos. El nivel sociocultural y económico es por tanto muy diverso de unos alumnos a otros.

Los Institutos Dámaso Alonso y Príncipe Felipe están ubicados en la zona de Fuencarral (Barrio del Pilar). Son centros de alrededor de 900 alumnos de nivel socioeconómico medio .

El Centro San Fernando, ubicado en la carretera de Colmenar Viejo, es un colegio privado con 2000 alumnos aproximadamente y de nivel socioeconómico medio bajo, que anticipa la Reforma de las Enseñanzas Medias. Acuden alumnos de Madrid y también de pueblos de la zona norte. Cuenta con internado.

La distribución por centros y cursos es la siguiente:

	3° BUP	COU (Letras)	COU (Ciencias)	2° Bach (Reforma)
I.B. Isabel la Católica			34	
I.B.Dámaso Alonso	37	28	29	
I.B.Príncipe Felipe			30	
Centro S. Fernando				22

Hemos elegido sólo alumnos de 3°, COU y 2° Bachillerato LOGSE porque son los niveles terminales anteriores a la Universidad, y se supone que, al ser la función un concepto nuclear en matemáticas, lo han utilizado en múltiples ocasiones y han de tenerlo ya interiorizado.

El nivel de rendimiento de todos los alumnos es el correspondiente a una población normal, ya que no se ha hecho ninguna selección previa, ni los alumnos pertenecen a colectivos específicos.

La definición de función que han estudiado estos alumnos se puede enclavar dentro del concepto moderno, es decir, la correspondiente a la teoría de conjuntos.

Fases

La Investigación ha constado de tres fases: La primera fue la presentación del cuestionario a los profesores. La segunda, la cumplimentación del cuestionario por parte de los alumnos. La tercera, entrevista a los profesores, para aclaración de algunos términos, y elaboración de conclusiones.

La recogida de datos

El cuestionario

Como instrumento de recogida de datos se ha utilizado el cuestionario que figura en el Anexo. Es una adaptación para los alumnos de un test aplicado por Even (1993), del Instituto de Ciencia de Israel, a 160 aspirantes a profesores de Secundaria de algunas universidades de U.S.A. Incluye cinco preguntas. Las dos primeras tienden a evaluar el "concepto definición"; las otras tres pretenden averiguar cuál es el "concepto imagen", a través del reconocimiento de funciones en distintas formas y la discriminación respecto a expresiones que no son funciones.

Se pasó el cuestionario a principios de curso y lo cumplimentaron en la hora de clase y sin ayuda de material.

Pasamos a analizar detenidamente cada una de las preguntas del cuestionario.

1. Definición de función

La primera pregunta del cuestionario es: *Escribe una definición de función.*

Pretendemos con esta pregunta estudiar las definiciones que los alumnos dan de una función, analizando las notas esenciales que incluyen en las mismas, las palabras matemáticas que utilizan, la elaboración personal que imprimen en ellas, o la utilización mimética de las definiciones que aparecen en los libros de texto.

La segunda pregunta plantea un interrogante: *¿es lo mismo función que ecuación?. Si no es lo mismo, explica por qué.*

Es una pregunta de discriminación. Si en su definición han utilizado el término ecuación, los alumnos tendrán que explicar el contexto en que lo han utilizado. Si ecuación para ellos es algo muy diferente, tendrán que explicar en qué sentido lo es.

<u>2. Imagen de una función</u>

Las tres preguntas siguientes van encaminadas a captar si entre las características del "concepto imagen" los alumnos incluyen la arbitrariedad, la univocidad y el dominio de la representación lineal, sobre otras formas de representación. También se pretende ver la relación entre su definición teórica y la aplicación de esta definición en contextos particulares.

La pregunta nº 3 es la siguiente:

3. A un alumno se le pide que ponga un ejemplo del gráfico de unafunción que pase por los puntos A y B (figura 1). El estudiante da la respuesta de la fig. 2.

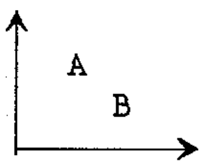


Fig. 1

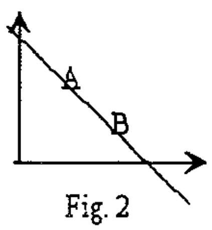


Fig. 2

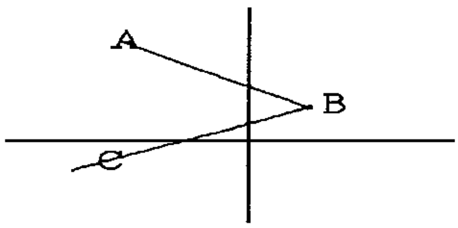
Cuando se le pregunta si hay otra respuesta el estudiante dice: "No"

- Si piensas que el alumno tiene razón.Explica por qué
- Si piensas que el alumno está equivocado, ¿Cuántas funciones que satisfacen la condición puedes encontrar?. Razona la contestación

Se trata de una pregunta en la que el alumno debe representar una función según su concepto imagen. Será un ejemplo de su representación mental. La condición que se le da para esta representación es que pase por dos puntos. Esta ejemplificación, junto con la explicación que se le pide, permite extraer conclusiones acerca de la univocidad, la arbitrariedad y el dominio de la linealidad sobre otras formas de representación, es decir, si el alumno cree que por dos puntos sólo puede pasar una función (identificando función con función lineal) o si, por el contrario, puede haber muchas funciones que cumplan dicha condición y qué tipos de funciones son.

La pregunta nº 4 es la siguiente:

4. Preguntado un alumno sobre cómo sería la gráfica de una función que pase por los puntos A, B, C, ha dado la siguiente contestación:



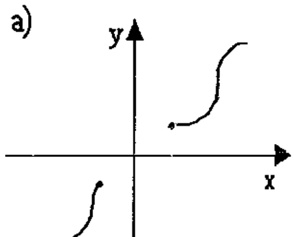
¿Es correcto?
¿Hay otra respuesta correcta? Da un ejemplo.
¿Puedes encontrar otro?
¿Cúantos?
Si no, ¿cuál sería la respuesta correcta?

Aquí se trata de que el alumno identifique un ejemplo dado según su concepto imagen. Se trata de conocer si en su imagen mental está implícita la idea de univocidad y determinar si el dominio de la representación lineal se confirma.

La pregunta nº 5 es la siguiente:

5. **R** es el conjunto de los números reales y **N** el conjunto de los números naturales. Un alumno dice que las expresiones de *a)* a *f)* **no son funciones.**

a)



b) $f: R \rightarrow R$
$f(x) = 4$

c) $g: N \rightarrow R$

d) Una correspondencia que asocia el número 1 con cada número positivo, el -1 con cada número negativo y el 3 con el 0.

e) $g(x) = \begin{cases} x, \text{ si x es un número racional} \\ 0, \text{ si x es un número irracional} \end{cases}$

f) $\{(1,4), (2,5), (3,9)\}$

Para cada uno de los casos anteriores, contesta si el estudiante acertó o se equivocó. Razona cada una de sus decisiones.

Se plantean varios ejemplos de función de distintos tipos para su reconocimiento. Los tipos de representación que se han manejado han sido:

- representaciones gráficas
- expresiones algebraicas
- enunciados
- conjuntos de pares

Se pretende que los alumnos discriminen las siguientes notas esenciales del concepto de función

- correspondencia
- aplicación
- aplicación unívoca
- arbitrariedad

Tabulación y codificación

Todos los cuestionarios los ha analizado y codificado una sola persona, a fin de asegurar la mayor fiabilidad en la clasificación. Se hizo una primera lectura para encontrar las categorías que permitirían la codificación de los datos de acuerdo con los objetivos de la experiencia.

Para la tabulación se utilizó el estadillo diseñado al efecto que figura en el Anexo .

En la primera pregunta los términos matemáticos utilizados mas generalmente por los alumnos han sido:

- Expresión algebraica
- relación
- correspondencia
- ecuación
- aplicación unívoca
- expresión representable mediante gráfica
- fórmula matemática
- ley, regla de formación.

Todas las definiciones fueron analizadas y según la idea central expresada en el enunciado se agruparon en las siguientes categorías:

- correspondencia
- expresión matemática
- expresión y representación
- correspondencia y expresión
- representación
- correspondencia y representación
- otras.

La segunda pregunta se correlacionó con la primera, y se analizó, con la técnica de análisis de contenido, si había contradicciones entre las dos expresiones. Se tuvieron en cuenta las aclaraciones que la segunda pregunta aportaba a la primera sobre el concepto de función.

En las otras preguntas se codificó la presencia o ausencia en las contestaciones de las categorías que habían aparecido en las definiciones y la presencia o ausencia de los siguientes rasgos:

- univocidad
- regularidad en los gráficos
- necesidad de representación
- familiaridad en los gráficos
- dominio de la línea recta
- necesidad de expresión algebraica
- caracterización de dominio y rango.

Para la codificación de estos rasgos se elaboró el estadillo que figura en el Anexo .

En las preguntas 3 y 4 también se contabilizaron las frecuencias de las contestaciones sobre si la respuesta era correcta y si había otras respuestas también correctas, según los siguientes indicadores:

- La respuesta no es correcta por....
- La respuesta si es correcta por......
- Sólo hay una respuesta correcta
- Puede haber otras respuestas
- Hay un número finito de respuestas correctas
- Hay infinitas respuestas
- Sólo hay rectas que cumplan estas condiciones
- Sólo hay parábolas, hipérbolas, elipses, circunferencias
- Hay infinitas respuestas.

Las correspondientes respuestas se estudian en el epígrafe dedicado al análisis de los resultados.

Análisis e interpretación de los resultados

a) Respecto a la definición de una función

En las contestaciones a esta pregunta del cuestionario, los alumnos definen la función con referencia a cada una de las categorías que se expresan en la siguiente tabla

	COU LETRAS (28)	COU CIENCIAS (93)	TERCERO (37)	2º LOGSE (22)
Correspondencia	14	33	12	5
Expresión matemática	2	13	6	11
Expresión y representación	2	16	8	
Correspondencia y expresión	2	4	5	3
Representación	3	8	2	1
Representación y Correspondencia	0	2	1	
Otras	2	5	1	
No contestan	3	11	2	1

Los porcentajes se expresan en el Gráfico 1.

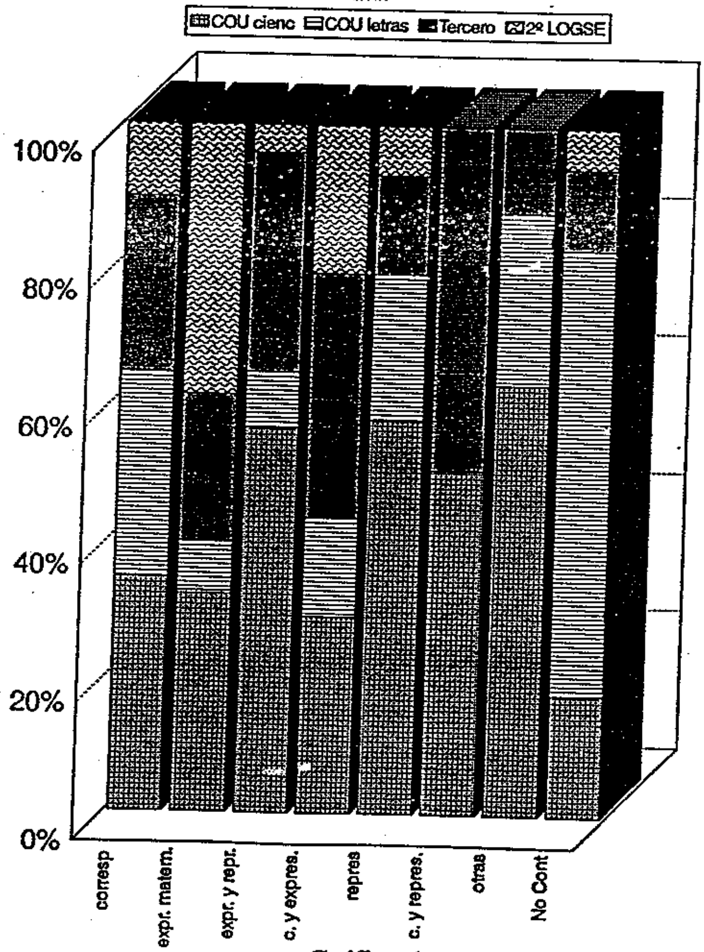


Gráfico 1

Estudiada la mayor incidencia de cada una de estas categorías en las definiciones, encontramos que las contestaciones a la primera pregunta del cuestionario indican que los alumnos pueden encuadrarse en cuatro grupos respecto al "concepto definición":

1. La función es una correspondencia
2. La función es una expresión o ecuación
3. La función es una representación gráfica.
4. Otras definiciones.

Estos grupos se han hecho con el siguiente criterio: Estudiar en cada definición la idea central que expresan los alumnos. Así una definición de este tipo:

"Función es aquella que hace corresponder a cada "x" una "y". Para cada valor de x habrá un determinado valor de y".

estará clasificada en el grupo 1.

Una definición de este tipo:

"Es la expresión matemática que asocia a cada punto de la abscisa x un punto de la ordenada y"

está clasificada en el grupo 2, a pesar de que indica cierta relación entre variables.

En el tercer grupo estará la siguiente, aunque algún elemento de ella indica expresión

"Función es la representación gráfica de una ecuación"

En el grupo 4 estaría:

$$\textit{función es } \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

El Gráfico 2 expresa los porcentajes de alumnos en estos 4 grupos

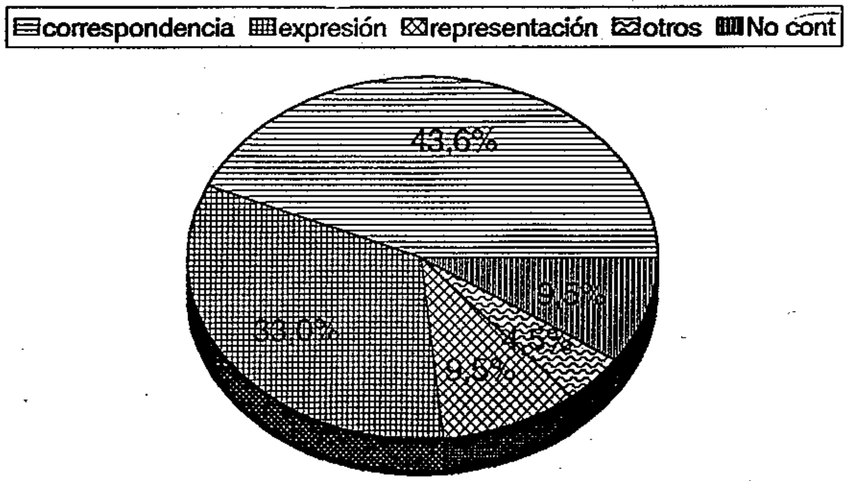


Gráfico 2

Primer grupo

78 alumnos responden que la función es una correspondencia. De ellos 28 la definen como una correspondencia entre conjuntos; otros añaden a la correspondencia una ley que permita encontrar valores de y para valores de x; y 1 añade, además, la existencia de un conjunto dominio y un conjunto imagen.

Todos los alumnos que identifican función con correspondencia responden que no a la pregunta siguiente del texto *¿Es lo mismo función que ecuación ?*, y la justificación que dan es que la ecuación sólo se verifica para 1 o 2 valores o un número determinado, mientras que la función se verifica para un número infinito de valores.

Segundo grupo

59 alumnos consideran que la función es una expresión matemática. En algunos casos le añaden el adjetivo de algebraica y en otros el de ecuación, asociando esta expresión algunas veces a una correspondencia y otras veces a una representación gráfica. Son 31 los que consideran a las funciones como expresiones matemáticas, 27 como expresiones que van acompañadas de una representación gráfica, y 14 como expresiones que surgen de una correspondencia. En las contestaciones de estos alumnos a la segunda pregunta se da la paradoja de que incluso los que han definido la función como una ecuación, luego contestan que la función no es lo mismo que ecuación. Para estos alumnos función no es lo mismo que ecuación, por las siguientes razones: a) porque la función es la representación de la ecuación; b) porque en la ecuación no aparece el término *y;* c) porque la ecuación es la definición de la función; d) porque la ecuación es una igualación de términos; e) porque la función es la expresión de una recta o una curva y la ecuación no; f) porque hay funciones que no se pueden representar por medio de ecuaciones.

Tercer grupo

17 alumnos consideran que las funciones son fundamentalmente representaciones gráficas, pero 3 de ellos lo asocian a una correspondencia. Para ellos, la diferencia entre ecuación y función es que la ecuación también puede ser una recta y la función no.

Cuarto grupo

8 alumnos dan definiciones en relación con propiedades de las funciones, como identificar una función con un límite o con curvas continuas o discontinuas.

Independientemente de la especialidad (letras o ciencias) o del curso (3° de BUP o COU), los alumnos del plan de estudios vigente identifican mayoritariamente la función con una correspondencia, sin embargo los alumnos del plan experimental (el futuro plan diseñado por la LOGSE) la identifican mayoritariamente con una expresión matemática tal como se ve en el Gráfico 3.

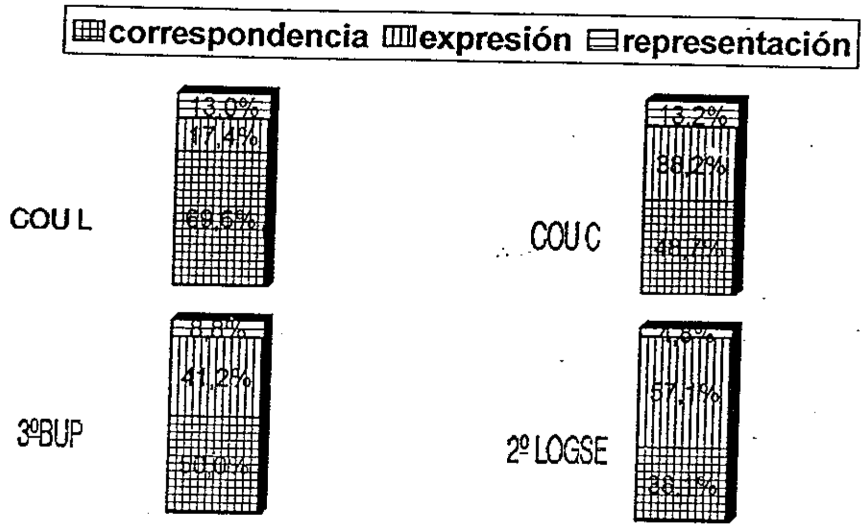


Gráfico 3

Muchas de las definiciones son reproducciones casi literales de las que aparecen en los libros de texto, sobre todo en los grupos de COU de Letras, a pesar de que el concepto definición que aparece en algunos libros de texto resulta difícil de comprender, tanto por el contenido semántico de las palabras como por el amplio campo de validez de los distintos significados.

Otras definiciones son mas personales. Incluimos, a título de ejemplo, algunas de éstas.

"Una función es un grupo de cifras o números que se relacionan entre si y que tienen una incógnita que cuando la vas sustituyendo por diferentes cifras nos va dando resultados diferentes de esa función. Con esos resultados podrás representar la gráfica de esa función"

Como se puede observar, hay idea de dependencia, aunque no se determina claramente sobre qué conjuntos se realiza esta dependencia. Parece que el alumno necesita la existencia de una incógnita y la sustitución de ella por algunos valores que puedan ser representados.

Otro alumno de COU Ciencias la define así:

"Una función es una ecuación de ninguna, una, dos o más incógnitas sin igualar a nada"

Aquí prevalece la idea de expresión, sin aludir a ningún tipo de representación o de dependencia. Es curioso que este alumno que utiliza la palabra ecuación para definir su función, a la pregunta siguiente de si es igual una función que una ecuación contesta que no, porque no esta igualada a cero y porque la ecuación siempre tiene una incógnita.

Un alumno de 3º, la define así:

"Es la ecuación numérica que representa a una gráfica lineal, en la cual puede o no existir una variable (x) que está condicionada por su valor en y (x en función de y)".

Este alumno considera la función como expresión y representación, no se aclara respecto de si debe existir o no una variable; y para completar la definición utiliza la palabra función. Al contestar a la siguiente pregunta acerca de si es lo mismo función que ecuación, responde que no, porque en la ecuación hay una igualación entre dos miembros y no existen infinitas posibilidades, sin embargo en la función el término variable x, al tomar distintos valores, varía la imagen y.

b) Reconocimiento de funciones.

b1) ¿Cuántas funciones existen que pasen por dos puntos dados ?

Condiciones	**frecuen.**
Solo hay una función que pase por dos puntos	14
Hay infinitas funciones que pasen por dos puntos	102
Por dos puntos pasan infinitas parábolas	8
Hay muchas funciones que pasan por dos puntos	32
Puede haber 2 funciones más que pasen por 2 puntos	1
Pasan parábola, circunferencia, elipse	16

Las contestaciones a la tercera pregunta, indican que la mayoría de los alumnos (90%), consideran que por dos puntos pasan infinitas o muchas funciones; solamente el 9% manifiestan un dominio lineal, pues creen que por dos puntos sólo pasan rectas.

Cuando concretan con ejemplos proponen funciones familiares, la mayoría parábolas, y si realizan dibujos lo hacen generalmente con curvas.

b2). ¿Cuántas funciones existen que pasen por los tres puntos de la pregunta 4 ?

Puede haber otras respuestas	66
Puede haber infinitas funciones que pasen por 3 puntos	52
Hay otra respuesta correcta (no la da)	7
No es correcto, tiene que ser una parábola o hipérbola	14
No puede haber una función en que un elemento tenga dos imágenes	33
No puede haber una función que pase por tres puntos no alineados	2
Puede haber tres respuestas correctas	8
No es correcta porque aparecen dos rectas	7

También la mayoría de los alumnos (77%) consideran que por tres puntos pasan infinitas o muchas funciones. Sin embargo el test de la univocidad sólo lo han pasado en este caso el 18%. El 36% responden que puede haber mas de una solución correcta a la pregunta; y el 29% matiza más y dice que pueden existir infinitas.

Cuando los alumnos concretan con ejemplos, proponen funciones familiares y estudiadas en los niveles más elementales, como parábolas e hipérbolas o elipses; pero ninguno señala como respuesta la circunferencia, lo cual resulta extraño, ya que ésta es la curva mas familiar y elemental.

Los dibujos que realizan son casi siempre parábolas o triángulos (uniendo los tres puntos), pero también dibujan gráficos a trozos y curvas muy irregulares.

b3) ¿Cuáles de las expresiones de la pregunta 5 son funciones ?

Apartados	Si es función		No es función		No contesta	
	Frec	%	Frec	%	Frec	%
a	145	80	28	16	7	4
b	144	80	25	14	11	6
c	49	27	102	56	29	16
d	87	48	74	41	19	10
e	112	62	42	23	26	15
f	62	34	100	55	19	10

La pregunta 5 plantea una serie de expresiones de funciones mediante representaciones de los siguientes tipos:

- Gráfica
- Expresión algebraica
- Enunciado con ley de formación
- Pares ordenados.

Y de funciones que tienen las siguientes características:

- Continuidad
- Discontinuidad
- Continuidad no derivable
- Función arbitraria
- Función constante.

Hemos clasificado las contestaciones, según que los alumnos consideren que la expresión dada es función, no es función, o no contesten. Tanto en el caso de contestación afirmativa como negativa, los alumnos han cometido errores al tratar de justificar su contestación, errores que han sido tipificados y se comentan en la Parte III de este trabajo.

Todos los alumnos que han reconocido la primera de las expresiones como función han aceptado la discontinuidad y la forma irregular, y se han fijado especialmente en la dependencia de x e y. Algunos, sin embargo, aún admitiendo que es una función, dudan que pueda haber alguna gráfica así.

Los alumnos que reconocen como función la expresión algebraica f(x) = 4 se basan también en la dependencia de x a y. Muchos necesitan que aparezca la x en el segundo miembro, y lo justifican diciendo que en este caso x está elevado a 0.

En las contestaciones a la tercera expresión N->R, hay que hacer notar que aunque la mitad de los alumnos contestan que no es función, ésta no es una respuesta correcta a tenor de las justificaciones que dan, ya que éstas no tienen nada que ver con la respuesta correcta. Las justificaciones que dan se basan, en un 16% de los casos, en características de los conjuntos dominio y rango. Dicen que no es función porque a los números naturales no tienen por qué corresponderles los reales, o que N no es igual a R, o que los números negativos no están en R. Es decir, caen en el error de considerar que el conjunto imagen y el original de una función tienen que ser iguales .

Por tanto, las contestaciones correctas a este apartado c) serían solo del 40%.

Respecto a la cuarta expresión, los alumnos se encuentran divididos y esto parece que se debe a la palabra "correspondencia" con que se inicia el enunciado de este apartado.

La quinta expresión la identifican como función el 62% de los alumnos. La mayoría de los que no lo hacen consideran que no es función porque no puede ser representada; y la última expresión tampoco la identifican con una función, sino con tres puntos que dicen no estar entre sí relacionados porque a simple vista no se puede ver la regla de formación.

En el Gráfico 4 se puede observar el porcentaje de las contestaciones (si, no, y no contestan) para cada uno de los apartados.

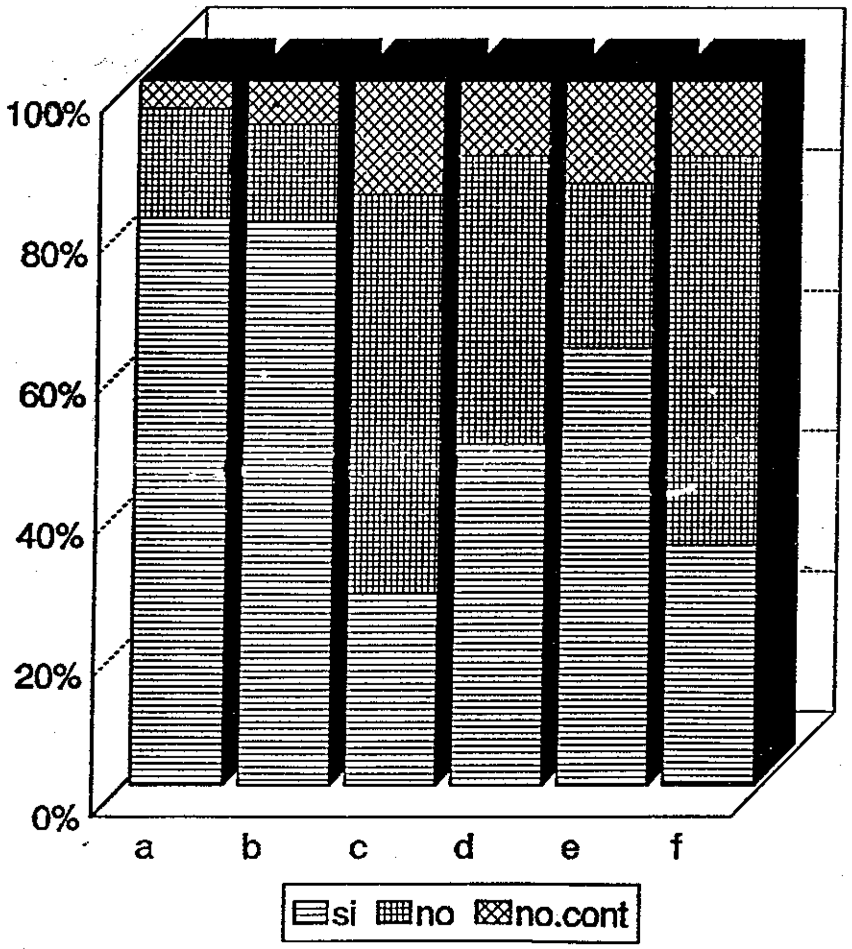


Gráfico 4

Las contestaciones a esta pregunta según especialidades y cursos se distribuyen así:

Apartados	COU Ciencias (93)			COU Letras (28)			3º B.U.P (37)			2º Bach. LOGSE (22)		
	% sobre el total de columna			% sobre el total de columna			% sobre el total de columna			% sobre el total de columna		
	SI	NO	N.C	SI	NO	N.C	SI	NO	N.C	SI	NO	N.C
a	86	10	4	93	7		76	16	8	50	45	5
b	72	20	8	86	11	3	86	8	6	95		5
c	21	59	20	32	61	7	35	43	22	27	68	5
d	47	41	12	43	50	7	43	43	14	68	27	5
e	66	20	14	50	32	18	64	24	12	59	23	18
f	33	54	13	43	57		32	51	16	32	64	4

Esto indica que los alumnos de COU de Letras, en este caso, son los que acumulan mayor número de aciertos en el reconocimiento de funciones; lo cual es comprensible si se estudia la programación oficial de esta opción de Matemáticas II, que da mucha importancia al estudio de las funciones.

Esta pregunta es de gran interés, porque mediante el estudio de las justificaciones que dan a cada uno de los casos nos permite contrastar el "concepto definición" con el "concepto imagen".

c) Relación entre el concepto imagen y el concepto definición

Las nociones matemáticas no se utilizan solamente a partir de su "definición formal", sino que cada individuo fabrica una representación mental que difiere de unos individuos a otros. Estos modelos individuales son elaborados a partir de modelos espontáneos (estos existen antes de haberse iniciado el aprendizaje y proceden de la experiencia) que interfieren con la definición matemática.

En el caso del aprendizaje del concepto de función, las experiencias que tienen los alumnos antes de haberse encontrado con la definición formal afectan al modo en que ellos elaboren la imagen mental de este concepto. Para clarificar el papel que juega la estructura mental del individuo.

Vinner y Hershkowitz (1980) introducen los términos de *concepto imagen* y *concepto definición* y los definen así:

"Usaremos el término concepto imagen para describir la estructura cognitiva total que se asocia con el concepto,que incluye todas las representaciones mentales y las propiedades asociadas y procesadas. Nos referimos a la porción de concepto imagen que es activada en una situación particular como concepto imagen evocado. *Por otra parte, el* concepto definición *es el enunciado usado para hacer explícito el concepto".*

Según Davis y Vinner (1986), al aprender un nuevo concepto no se olvida el primitivo. Cuando el alumno se enfrenta ante una cuestión o tarea, dos ideas pueden actualizarse, la antigua o la nueva. Lo que está en juego es no la posesión o no de la nueva idea, sino la selección (a menudo inconsciente) de lo que se recupera. Es posible que se combinen las dos ideas, con resultados a menudo paradójicos o conflictivos.

A veces es muy difícil comprender un concepto cuando hay palabras en la definición que no han sido definidas o que tienen diversos significados. Y esto tanto por el contenido semántico de las palabras como por el amplio campo de validez de los distintos significados. El alumno que encuentra una definición por primera vez hace algunas suposiciones que están basadas en su concepto imagen y no en su concepto definición.

La siguiente definición de función se encuentra en algunos libros de COU.

"Una función es una relación entre dos conjuntos de tal manera que a cada valor del primero le corresponde un único valor en el segundo".

Aunque a primera vista no debe existir dificultad en el significado de las palabras para un alumno de COU, es verosímil que no llegue a captar el rango completo de posibilidades incluidas en esta definición. Los conjuntos pueden ser numéricos, de figuras geométricas, de matrices, de vectores, de puntos en un espacio n-dimensional, o cualquier otro tipo de objetos, incluidos las funciones. La forma de asignar un elemento de un conjunto a otro elemento de otro conjunto puede ser:

- Mediante una formula,
- Una transformación geométrica,
- Una tabla de valores,
- Un gráfico, y otros más.

Cuando los alumnos se enfrentan con la definición matemática es difícil que tengan en la mente todas estas posibilidades. Así según la cantidad de ellas que asocien y sus experiencias previas se formarán una *representación mental.* Esta es un modelo individual, y es diferente de unos alumnos a otros, ya que cada uno de ellos aporta modelos, preexistentes antes del aprendizaje, de la noción matemática y que interfieren con el rango de posibilidades extraídas del concepto definición.

Dreyfus y Vinner (1989) en una investigación con 271 estudiantes de High School y 36 profesores de College, encontraron diferencias significativas entre los conceptos definición y los conceptos imagen que manejaban estos estudiantes y profesores.

Las respuestas a la noción de función (concepto definición) incluían además de la definición standar (a cada valor de x le corresponde un valor de y), otras variantes como:

- Una correspondencia entre dos variables
- Una regla de correspondencia
- Una manipulación u operación (de un número se obtiene otro)
- Una fórmula, expresión algebraica o ecuación
- Un gráfico

Sin embargo la respuesta a las cuestiones sobre reconocimiento de funciones que se le plantearon, permitía vislumbrar que su concepto imagen no estaba de acuerdo con la definición que habían dado. Así pues pensaban:

- Que las funciones deberían ser contínuas
- Que en cada subdominio el criterio definición de función debería ser el mismo
- Que el valor asignado por la correspondencia debe ser exactamente el mismo para todo elemento del dominio
- Que no pueden existir puntos excepcionales

Estos resultados han sido replicados en otros estudios (Barnes 1988, Markovits y otros 1986, Vinner 1983).

Markovits y colaboradores (1986) concluyen que la complejidad de la definición moderna causa problemas por el número de diferentes componentes (dominio, rango y regla). Según ellos, todavía se pone poco énfasis en el dominio y rango de una función, ya que el mayor esfuerzo se pone en determinar y encontrar la regla o relación (que visualmente se establece mediante una fórmula). El énfasis que se pone en las gráficas formadas por líneas rectas hace que los alumnos evoquen gráficas lineales cuando se les pide que piensen en posibles funciones que pasan a través de puntos. Estos investigadores piensan que la concepción de funciones como gráficas lineales está influenciado por el estudio simultáneo de la geometría y también por el tiempo que se gasta en el curriculo oficial en estudiar exclusivamente funciones lineales.

Barnes (1988), en una investigación con estudiantes de grado 11° (3° de BUP) y Universidad sobre el concepto imagen, encontró que para una gran mayoría de estudiantes la expresión $y = 4$ no es función porque el valor de y no depende de x; sin embargo $x^2 + y^2 = 1$ sí es función porque representa una circunferencia, y

$$y = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 2-x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

no es una función sino varias, porque hay varios criterios de definición.

¿Qué sucede en este caso con los estudiantes españoles ?

Para analizar las diferencias que existen entre el concepto imagen y el concepto definición de estos alumnos, hemos buscado la relación entre la definición de función que dan a la primera pregunta del cuestionario y la aplicación que hacen de este concepto a través de las contestaciones a todas las demás preguntas.

En cuanto a la definición de función, ya hemos visto que los alumnos consideran las funciones :

a) como correspondencias, con o sin univocidad,

b) como expresiones,

c) como representaciones.

La relación que buscamos es si su definición se corresponde con la aplicación de esta definición en ejemplos concretos.

Mediante la técnica del análisis de contenido, realizada sobre las contestaciones de los alumnos, los ejemplos que ponen y sus expresiones o dibujos, hemos realizado agrupamientos en torno a las siguientes categorías :

1. Existencia de una regla.

En esta categoría se evalúa si el alumno considera la existencia de una regla como una condición necesaria para que exista función. Se puede evaluar fundamentalmente en las contestaciones a 5b), 5c), 5d), 5e), 5f).

2. Univocidad.

Esta categoría supone la necesidad de que a cada elemento del conjunto inicial le corresponda sólo uno en el conjunto final. La univocidad se puede evaluar fundamentalmente en las contestaciones a la pregunta 4 y a las expresiones a), d), e).

3. Gráficos familiares.

Se evalúa si los alumnos sienten la necesidad de que las funciones se expresen mediante gráficos y estos sean de los conocidos en sus estudios de matemáticas. La necesidad de que las funciones se expresen con gráficos familiares se puede ver a través de las contestaciones a las preguntas 3 y 4 y a la expresión a) y b)

4. Gráficos bonitos, regulares y razonables

Se evalúa en esta categoría si los alumnos asocian una función con la existencia de una gráfica regular, sin discontinuidades, cúspides, o sinuosidades. La necesidad de que las funciones se expresen con gráficos bonitos y razonables, se observa en las contestaciones a las preguntas 3 y 4 y a las expresiones a), d) y g)

5. Linealidad

El predominio de la linealidad se ve en las contestaciones a las preguntas 3 y 4.

6. Existencia de fórmulas, variables o incógnitas

Se evalúa si los alumnos consideran imprescindible para la existencia de una función que ésta venga expresada o pueda expresarse mediante una fórmula, con términos en x o cualquier otra variable.La necesidad de existencia de variables o incógnitas en las funciones se puede ver en las contestaciones a las expresiones a), c), d), f).

7. Necesidad de igualar el dominio al rango.

Se evalúa si los alumnos condicionan la existencia de una función a que la correspondencia sea suprayectiva. La necesidad de igualar el dominio al rango se ve fundamentalmente en las contestaciones a las expresiones b) y c).

8. Representabilidad de la expresión

La necesidad de que la expresión sea representable para clasificarla como función se puede observar a través de las contestaciones a las expresiones b), c), d), e).

Las categorías 3, 4, 5, 6, 7, 8, nos indican si los alumnos han conseguido la característica esencial de la arbitrariedad para las funciones.

La categoría 1, si además de los conjuntos es esencial para ellos la existencia de una regla.

La categoría 2 define la univocidad.

La codificación de las contestaciones se observa en la siguiente tabla, donde las frecuencias y los porcentajes están referidos al total de cada una de las columnas.

CONCEPTO DEFINICIÓN ⟶ CONCEPTO IMAGEN

	Alumnos que en la definición incluyen correspondencia (40)		Alumnos que en la definición incluyen correspondencia y univocidad (39)		Alumnos que en la definición incluyen expresión solamente (44)		Alumnos que en la definición incluyen representación solamente (15)		Alumnos que en la definición incluyen expresión y representación (25)	
	Frec	%	Frec	%	Frec	%	Frec	%	Frec	%
1.Existencia de una regla	21	**52**	15	**38**	13	**29**	3	**20**	8	**32**
2.Univocidad	12	**30**	29	**74**	3	**6**	2	**13**	5	**20**
3.Gráficos familiares	13	**32**	15	**38**	19	**34**	6	**40**	15	**60**
4.Gráficos bonitos, razonables	12	**30**	2	**5**	14	**32**	0	**0**	9	**36**
5.Dominio lineal	6	**15**	2	**5**	5	**11**	2	**13**	4	**16**
6. Existencia de fórmulas, variables o incógnitas	5	**12**	4	**10**	10	**25**	6	**40**	5	**20**
7. Iguala dominio a rango.	9	**22**	6	**15**	5	**11**	4	**26**	3	**12**
8. Expresión siempre representable	8	**20**	4	**10**	11	**25**	11	**73**	21	**84**

Si consideramos que para estos alumnos, el concepto definición es el que han utilizado en la primera pregunta, y su concepto imagen es cómo esta definición la llevan a la práctica, es decir, cómo la aplican en ejemplos concretos, de los resultados expresados en la tabla anterior podemos sacar las siguientes conclusiones:

1. Sólo la mitad de los alumnos que en su concepto definición incluyen **la correspondencia**, la tienen asumida en su concepto imagen. Es decir, de los alumnos que definen la función como una correspondencia, el 52% tienen en cuenta las condiciones de correspondencia cuando van a reconocer si una expresión de cualquier tipo es una función. Sin embargo de los alumnos que en su concepto imagen incluyen la correspondencia unívoca, el 74% utilizan la univocidad para discriminar funciones. Parece, por tanto, que la univocidad es una característica más fuerte que la correspondencia, para estos alumnos.

2. De los alumnos que definen la función como una **expresión representable,** el 84% tiene su concepto imagen similar a su concepto definición. Es decir, reconocen y afirman en los ejercicios propuestos que las funciones son expresiones y se representan, y no aceptan las funciones que no pueden representarse o expresarse.

3. De los alumnos que definen la función como **representación,** el 73% cree que las funciones son expresiones representables, y el 40% necesita la existencia de fórmulas, variables o incógnitas para identificar una función.

4. De aquellos alumnos que en su concepto definición incluyen **la expresión**, tan sólo el 25% exige la existencia de fórmulas, variables o incógnitas para reconocer una función, y el mismo porcentaje exige que la expresión sea siempre representable; frente a un 29% que necesita la existencia de una regla para identificar una función. Lo cual podría significar que los alumnos que definen una función como fórmula, ecuación o expresión algebraica, son los que manifiestan mayores inconsistencias a la hora de reconocer funciones.

5. El predominio de la **linealidad**, es decir, creer que las funciones son siempre funciones lineales, es la categoría que menos representada está.

6. La tercera parte de los alumnos, según sus contestaciones, tienen la necesidad de que las funciones exhiban **gráficos familiares** (parábolas, hipérbolas, elipses), y cuando dibujan curvas lo hacen de manera que no sean muy raras. Esta característica es más acentuada (llega al 60%) en el caso de los alumnos que definen la función como expresión y representación.

En resumen: los alumnos que definen la función como **expresión representable** son los que en mayor medida tienen identificado el concepto imagen con el concepto definición; y los que definen la función como **expresión solamente** son los que en menor medida han identificado el concepto imagen con el concepto definición.

III. ERRORES OBSERVADOS

En matemáticas, el conocimiento es indisociable de la comprensión. Por eso los errores son útiles no sólo al alumno sino también al profesor. En efecto, no sabemos muy bien qué es "comprender" un concepto matemático. Para Bloom, la palabra comprensión abarca tres niveles de capacidades diferentes: la transposición, la interpretación, la extrapolación. En matemáticas la situación es más compleja, pues hay mayor número de niveles, pero lo que nosotros intentamos alcanzar de comprensión en un alumno de secundaria puede incluirse en el dominio de la transposición (posibilidad de expresarse de otra manera, explicar) y de la interpretación (capacidad de reconocer, proponer ejemplos, aptitud para la transferencia, abstracción del concepto, utilización del concepto) y hemos eliminado conscientemente todos los niveles de creación.

Pero no se puede estar seguro de que un alumno ha comprendido un concepto mas que cuando es capaz de transponerlo e interpretarlo. Ciertamente, si triunfa en cierto numero de ejercicios de transposición se podría conjeturar esta capacidad, pero sin estar totalmente seguro. Por el contrario, un **error** es una prueba de no capacidad de transposición, por tanto de no comprensión. Así, es por el estudio de la incomprensión y de su revelador, el error, por el que se puede llegar a asegurar el fenómeno de la comprensión.

Los trabajos de Laurence Viennot en Física, han demostrado la existencia en los alumnos y en los adultos de *modelos espontáneos* diferentes de los modelos teóricos. Después de que los aprendizajes han hecho adquirir nuevos modelos a los alumnos, estos modelos espontáneos permanecen, cohabitan con los modelos aprendidos y conservan su campo de aplicación.

Muchas veces, estos *modelos espontáneos* son teorías falsas, opiniones aberrantes, automatismos defectuosos, que se convierten en verdaderos teoremas que persisten y se afianzan con el paso del tiempo y del aprendizaje.

El profesor que conozca estos modelos espontáneos podrá orientar a los alumnos en la sustitución por los nuevos, con estrategias didácticas adecuadas, para que los aprendizajes se asienten establemente en su estructura cognitiva.

Las investigaciones de Mac Gregor, de la universidad de Melbourne sobre análisis de errores en la formulación de ecuaciones, las de Vinner sobre concepto imagen y concepto definición o las de Borassi sobre estrategias para sacar ventaja de los errores que cometen los alumnos, nos indican la importancia que el análisis de los errores tiene en orden a la elaboración de estrategias didácticas eficaces.

Los estudios sobre investigación de errores e ideas falsas en los estudiantes de matemáticas (Radazt 1979, Confrey 1990, Graeber y Johnson 1991), que están de acuerdo con un punto de vista constructivista, ven los errores no solamente como una parte inevitable del aprendizaje, sino como una fuente valiosa de información acerca del proceso de aprendizaje, como una clave que los profesores e investigadores tienen para descubrir lo que los estudiantes realmente saben y cómo han llegado a construir tal conocimiento. Tal pensamiento en torno a los errores representa un considerable avance, comparado con el conductismo, proporciona contribuciones importantes a la educación matemática, e invita a los estudiantes a sacar ventaja de los errores como oportunidades importantes de instrucción. Dentro de esta línea, solamente se implica a los investigadores y profesores, no a los estudiantes, a la actividad creativa de analizar los errores, aunque el potencial de los errores para generar nuevas cuestiones y exploraciones, probablemente todavía, salvo excepciones, no ha sido explotado y reconocido.

El valor de comprometer a los estudiantes en el análisis de sus errores, ha sido ya reconocido en otras áreas distintas de las matemáticas. En computación, por ejemplo, se espera que los estudiantes resuelven los problemas de sus propios programas incorrectos. Investigaciones de la teoría del cambio conceptual en el aprendizaje sugerían que las falsas ideas de los estudiantes pueden ser utilizadas para generar conflictos, que pueden llevar a los estudiantes a un cambio en sus teorías sobre cómo el mundo opera. Un similar principio informa el "conflict teaching", una estrategia desarrollada para la instrucción matemática por Bell (1986) y sus colegas.

Además, la historia de las matemáticas muestra que los matemáticos han sido capaces muy a menudo de sacar partido de los errores, de manera que vayan más allá de su diagnóstico y remedio. A veces un fallo puede conducir a inesperados y revolucionarios resultados, como, por ejemplo, cuando Sacchieri inconscientemente desarrolló una geometría no euclídea como resultado de su intento fallido de "probar" el postulado de las paralelas. Otro interesante ejemplo lo proporciona el temprano desarrollo del cálculo. Los errores iniciales en esta área sacudieron la confianza de los matemáticos hasta el punto de producir una revisión de la metodología usada en la disciplina, lo cual no solamente hizo posible "fijar" algunos conceptos y resultados erróneos, sino, más importante, condujo a la reformulación de los fundamentos de la matemática.

Por tanto, una manera de enfocar la acción didáctica puede ser a partir del análisis de errores que cometen los alumnos, para descubrir los aprendizajes mal adquiridos, los conceptos no elaborados, los automatismos defectuosos, los procesos incompletos. Este mismo análisis nos advertirá acerca de la manera de aprender, acerca de la presencia de obstáculos de naturaleza didáctica, acerca del sentido de la enseñanza.

Sin dejar de tener en cuenta que los errores tienen un contexto específico y que las explicaciones que se dan son para dicho contexto, ya que pueden variar para otras situaciones, se han considerado en este trabajo sólo aquellos errores que contabilizan al menos un 10% de las contestaciones. Se han obtenido los siguientes:

1. Respecto a la arbitrariedad

Todos los errores vienen a indicar que bastantes alumnos sólo admiten funciones bien definidas, donde se pueda saber qué número corresponde a otro número mediante la aplicación de una regla o la solución de una ecuación. Generalmente no admiten funciones definidas en otros conjuntos que no sean numéricos, ni funciones de las que no se pueda conocer su ecuación.

Estos errores pueden provenir de la forma en que se han presentado a los alumnos las experiencias sobre funciones, que ha inducido en ellos la creación de una imagen mental determinada por unas características entre las cuales no está *la arbitrariedad.*

Una estrategia didáctica eficaz en este caso es proponer ejemplos de funciones que:

- No puedan ser representadas
- Se obtengan de un experimento "científico" que no permita la determinación de una fórmula
- Estén definidas entre conjuntos no numéricos

También es importante explicar y aplicar en contextos no matemáticos cada una de las palabras que aparece en la definición de función.

Los errores que cometen algunos alumnos en sus explicaciones sobre qué es una función, que nos inducen a pensar que no aceptan la arbitrariedad como característica de la función, son por ejemplo, las siguientes justificaciones que dan a las preguntas del cuestionario:

No pueden existir funciones sin variable independiente

- El apartado f) no es una función, es una sucesión de puntos
- No pueden existir funciones que no tengan incógnita
- No pueden existir funciones que no vengan representadas por ecuaciones
- La expresión del apartado e) no es una función porque no tiene lógica
- La expresión del apartado f) no es función ya que falla el par (3,9), debería ser (3,6)
- La expresión del apartado f) no es función porque no indica relación entre grupos de numeros
- La expresión del apartado f) no es una función es un conjunto; estos puntos querrán decir que son de una función, pero no es una función

- No se pueden poner números al azar sin haber puesto la ecuación por la que se rigen.

2. Respecto a la representación gráfica

Los errores vienen a indicar que en algunos casos los alumnos disocian función y representación gráfica (una cosa es la función y otra su representación gráfica). El alumno ve muchos objetos (gráfica, tabla, diagrama relación) donde sólo hay uno: la función.

En otros casos, supeditan la naturaleza de la función a su representación gráfica (no es función porque no se puede representar o porque resultaría una gráfica muy rara).

Además, las funciones deben exhibir gráficas admisibles y que respondan a standares prefijados (deben tener asíntotas, máximos, mínimos, no deben tener puntos sueltos, ni ser demasiado raras).

Una estrategia didáctica que podría ser eficaz en esta situación podría consistir en independizar el concepto de función de su representación gráfica. Un ente matemático es una función si cumple las condiciones dadas en la definición. Además, en algunos casos se puede representar.

Sería conveniente (aplicando el principio de Dienes de la variabilidad perceptiva):

- Proponer ejemplos de funciones en todas las situaciones imaginables: con discontinuidades, puntos sueltos, puntos singulares, etc.
- Utilizar todas las formas posibles de representación mental de las funciones (enunciados, diagramas, conjuntos de pares ordenados, graficas, expresiones algebraicas, etc).

La mayoría de los alumnos consideran que donde hay una representación gráfica hay una función, y por tanto, aquello que no puede ser representado no se puede considerar función; pero solamente un 25% admite la existencia de dicha función porque cumple los requisitos.

Los errores mas frecuentes son los siguientes:

- No pueden existir funciones que no tengan asíntotas, ni máximos, mínimos, puntos de corte.
- Es la representación de una función, la función hay que hallarla .
- Es necesario una unidad en los ejes coordenados para poder representar una función.
- Es una función, pero no puede haber una gráfica así.
- No puede haber intervalos vacíos en las funciones
- La expresión del apartado g) no es función porque no se puede representar.

- La expresión del apartado f) no es función porque son tres puntos pero no dice cómo se unen entre sí.
- En la expresión del apartado b) lo que se da es una recta, no una función.
- La expresión del apartado d) no es función porque hay un punto separado de la supuesta función y además ésta está cortada.
- La expresión del apartado d) no es función porque no nos daría nada concreto.
- Unos puntos nunca son una función; son la representación de una función.

3. Respecto a los conjuntos dominio y rango

Los componentes de una función (dominio, regla, rango) son frecuentemente fuentes de error, más a menudo el dominio y el rango, a pesar de que en la enseñanza los profesores suelen insistir mucho en el cálculo de dominios y rangos. Puede ser que dicho cálculo se convierta en un automatismo mecánico que obscurece la verdadera naturaleza del concepto, ya que los alumnos en bastantes casos consideran que:

- El dominio y el rango deben ser conjuntos iguales (es decir toda función debe estar definida de R en R, de Z en Z o de N en N).
- Creen que de un número natural no se puede producir un número real.

El error de considerar que $f(x) = 4$ no es una función, porque es un punto, es un error sistemático que se da en otros países y es una constante en muchas investigaciones, así como el considerar que todas las funciones deben ser suprayectivas. Una estrategia didáctica, en este caso, podría ser el paso gradual de la utilización de la correspondencia a la fórmula matemática. Los profesores que explican la función como correspondencia, inmediatamente pasan a utilizar las funciones mediante fórmulas o expresiones algebraicas. Este salto debe hacerse gradualmente, invirtiendo tiempo en relacionar la expresión matemática con la regla que hace pasar de un conjunto de números a otro, indicando la naturaleza y extensión de cada uno de los dos conjuntos numéricos, que no siempre son iguales, ni en cuanto a la naturaleza de los números que lo forman, ni en cuanto a su extensión.

El error puede provenir de que al hacer explícitos los conjuntos dominio y rango se pone el mismo nombre y los alumnos confunden los conjuntos en los que se está operando con los conjuntos resultantes de la operación.

Muchos alumnos creen que en las funciones el dominio debe ser igual al rango, y que la imagen en una función debe ser un número de la misma clase que el original; es decir la imagen de un número natural debe ser un número natural. Otro error consiste en creer que las funciones deben ser aplicaciones suprayectivas.

Otros errores frecuentes son los siguientes:

- La función f(x)=4 es un punto, no es una función.
- La función f(x)=4 no relaciona los dos conjuntos, sino R con el 4.
- Los tres puntos de la función definida en el apartado f son un plano, no una función
- La expresión definida en el apartado f es un conjunto de soluciones, no una función
- No aceptan una correspondencia de N en R, porque N es "menor" que R.
- No puede haber una correspondencia entre N y R porque los naturales son limitados y los reales no, entonces sobra imagen.
- No puede ser función la expresión del apartado g) ya que entonces un número irracional sería un número racional.
- La función f(x) = 4 del apartado b) no es función porque cualquier valor que entre sale sin modificarse.
- Si una función es de R en R a un número real no le puede corresponder el 4, que es un número natural.
- La expresión del apartado g) no es función porque los números irracionales no admiten representación.

4. Respecto a la regla que establece la correspondencia

- En el apartado d), consideran que no es función porque el 3 no tienen ninguna relación con el 0. Bastantes alumnos consideran que hay correspondencia cuando hay una expresión de este tipo N→R, aunque no exista regla de formación.
- La expresión del apartado d) no es función porque no se pueden dar valores.

5. Respecto al dominio de la línea recta

Parece que en esta investigación no se ratifican algunos resultados de otras investigaciones sobre la linealidad, ya que los alumnos consideran que hay otras muchas funciones además de la función lineal que pasan por dos puntos dados, e incluso al proponer ejemplos de funciones acuden mas frecuentemente a funciones no lineales.

Pocos alumnos, un 10% del total, consideran que por dos puntos sólo se pueden trazar rectas.

Conclusión parcial.

El análisis de los errores observados y de las definiciones del concepto de función formuladas, nos lleva a concluir que existen en los alumnos inconsistencias entre las definiciones que dan y la aplicación de esta definición al reconocimiento y construcción de funciones.

Las falsas concepciones sobre el concepto de función, bastante extendidas en la población estudiantil examinada, son las siguientes:

- La creencia de que una función debe manifestarse o poder manifestarse siempre a través de una expresión algebraica

- La creencia de que una función siempre debe poder ser representada.

- La creencia de que el conjunto dominio y el conjunto definición de una función deben ser iguales.

IV. CONCLUSIONES GENERALES

1. A lo largo de la historia las definiciones más significativas del concepto de función marcan los diversos hitos que hemos estudiado en la evolución del concepto de función, desde la más primitiva de Leibnitz y los matemáticos del siglo XVIII, para los que una función es una fórmula matemática que expresa una relación entre dos variables, hasta la de Bourbaky, como subconjunto del producto cartesiano de dos conjuntos. Los matemáticos contemporaneos la definen en el sentido moderno. Para Pisot y Zamansky una función numérica es una aplicación de un conjunto E en un conjunto R. Courant y Robbins dicen que U es función de X si a cada valor de la variable X está asociado otro de la variable U.

2. Los libros de texto que han manejado estos alumnos, presentan el concepto de función en su acepción moderna, es decir, como una correspondencia o como una aplicación entre conjuntos, exigiendo la característica de la univocidad, y generalmente limitándose a funciones numéricas. Están familiarizados con la idea de una función que implica relación entre dos conjuntos de números, que supone la existencia de un conjunto definición o dominio, un conjunto de valores y una ley que expresa la dependencia de los valores de un conjunto respecto de los del otro.

3. Los alumnos están familiarizados con la idea de variable dependiente e independiente. Sin embargo el "concepto imagen" de función en bastantes de ellos responde a la idea vigente en la historia de etapas matemáticas anteriores. Es decir, la función sería una expresión matemática, o una representación, o una expresión que puede ser representada. Generalmente su representación habría de coincidir con imágenes familiares a su experiencia: rectas, curvas continuas y redondas, parábolas, hipérbolas, etc.

4. En relación con el "concepto imagen" de función, se puede decir que casi el 90% de los alumnos en una u otra forma no aceptan la arbitrariedad de una función. Consideran que la función debe poder ser representada, que debe responder a una regla de formación o que debe poder ser expresada mediante una fórmula.

La univocidad la reconocen un 35% de los alumnos, incluso aunque no la hayan incluido en su "concepto definición".

5. Generalmente los alumnos forman este "concepto imagen" a partir de las experiencias de funciones con que se han encontrado.

Así, si las funciones que han trabajado se le dan fundamentalmente mediante una fórmula tenderán a creer que la existencia de fórmulas es esencial para una función. Si además, a estas fórmulas, la mayor parte de las veces, se les asocia una representación, el alumno tenderá a creer que lo esencial de las funciones es que tengan una fórmula y que además pueda ser representada. Dado que la mayoría de los ejercicios que se le presentan a los alumnos en los niveles medios son fórmulas que producen una representación familiar y bastante regular, el alumno identificará las funciones con fórmulas que producen representaciones razonables.

Esto refuerza la idea de Dreyfus y Vinner (1989) de que los estudiantes prestan más atención a los aspectos computacionales u operacionales que a los conceptuales.

6. El proceso de aprendizaje de los alumnos está influido por la enseñanza del profesor, por ello es muy necesario reflexionar sobre lo que los profesores enseñan, en qué ponen el énfasis y que tipos de ayudas y recursos ofrecen.

7. La lectura común de los mismos textos y la enseñanza generalmente de los mismos profesores llega a desarrollar imágenes mentales bastante diferentes al contenido formal de los libros de texto.

8. La lectura de libros diferentes y la enseñanza con profesores también diferentes (en el caso de alumnos americanos y españoles) puede llegar a desarrollar representaciones mentales similares.

9. Una mayoría de estos alumnos no acepta la arbitrariedad de las funciones. Espera que estén expresadas mediante fórmulas o expresiones algebraicas que contengan variables. Necesitan que todas las funciones respondan a una regla de formación conocida o que pueda conocerse. Requieren que las funciones se puedan representar y que estas representaciones sean gráficas admisibles por ellos (no demasiado raras).

10. Mayoritariamente consideran que donde hay representación gráfica hay función, aunque sólo un 25% se para a considerar si cumple las condiciones enumeradas en la definición de función. También una mayoría cree que aquello que no puede ser representado no debe considerarse como función.

11. Los conjuntos dominio y rango son fuente de bastantes errores para estos alumnos, a pesar de que la enseñanza que reciben insiste mucho en el cálculo de ellos. Así, una mayoría cree que todas las funciones deben ser suprayectivas y que el conjunto imagen debe estar contenido en el conjunto inicial.

12. No se ratifica en este estudio una conclusión obtenida en otras investigaciones (Marcovits y colaboradores 1986) acerca del dominio de la representación lineal sobre otro tipo de representaciones no lineales. Al ejemplificar tipos de funciones, los alumnos piensan más en representaciones tipo parábola, elipse, hipérbola que en la línea recta.

13. Las concepciones falsas sobre funciones que hemos podido constatar en esta investigación son las siguientes:

- La creencia de que una función debe manifestarse o poder manifestarse siempre a través de una expresión algebraica.
- La creencia de que una función siempre debe poder ser representada.
- La creencia de que el conjunto dominio y el conjunto definición de una función deben ser iguales.

14. Parece que existe, en el caso de los errores, una fuente sistemática de producirlos, independiente de la enseñanza oral o escrita recibida, que se genera en la propia estructura cognitiva y en la cual influye poderosamente la historia de las experiencias del alumno y su estilo cognitivo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARNES, M. (1988). Understandig the function concept: Some results of interviews with secondary and tertiary students. *Research on Mathematics Education in Australia,* 24-33.

BELL, A. (1986). Diagnostic teaching: Two developing conflict-discussion lessons. *Mathematics Teaching, 116,* 26-29.

BREIDEMBACH, D., DUBINSKY, E., HAWKS, J., y NICHOLS, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational studies in mathematics, 23,* 247-285.

CAÑON, C. (1993). *La matemática, creación y descubrimiento.* UPCO. Madrid.

CONFREY, J. (1990). What constructivism implies for teaching. En R.B. Davis, C., A. Maher, y Noddings (Eds). *Constructivist views on the teaching and learning of mathematics.* Reston,VA: National Council of Teachers of Mathematics, pp 107-122

DAVIS, R.B, y VINNER, S. (1986). The notion of limit: Some seemingly unavoidable misconception stages. *Journal of Mathematical Behaviour, 5* (3), 281-303.

DREYFUS, T. y EISENBERG, T. (1987). On the deep structure of functions. *Proceedings of the eleventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education.* Montreal. Université de Quebec.

DREYFUS, T. y VINNER, S. (1989). Images and Definitions for the Concept of Function. *Journal for research in Mathematis Education, 20,* 356-366.

EISENBERG, T. (1991). Functions and associated learning difficulties. En: D. Tall (Ed). *Advanced mathematical thinking.* Kuwer Academic Publishers. Netherlands, pp.140-152.

EVEN, R. (1993). Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: prospective secondary teachers and the function concept. *Journal for Research in Mathematics Education., 24* (2), 94-116.

FREUDENTHAL, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht. D. Reidel.

GRAEBER, A. O. y JOHNSON, M. L. (1991). *Insights into secondary school students`understanding of mathematics.* Final report to the National Science Foundation.

LOVELL, K. (1971). Some aspects of the growht of the concept of a function. En: M.F. Rooskopf y L.P. Steffe (eds). *Piagetian cognitive development research and mathematical education.* Reston,V.A.

MALIK, M.A. (1980). Historical and pedagogical aspects of the definition of a function. *International Journal of Mathematics Education in Science and Tecnology, 11* (4), 489-492.

MARNYANSKI, A. (1975). Psychological characteristics of pupils' assimilation of the concept of function. En: J. Kilpatrick (Ed), *Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics. XIII* . Chicago. University of Chicago Press.

MARKOVITS, Z., EYLON,B. y BRUCKHEIMER, M. (1986). Functions today and yesterday. *For the Learning of Mathematics, 6,* 18-24.

RADATZ, H. (1979). Error analysis in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 10,* 163-172.

RUIZ, L. (1993). *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función: análisis epistemológico y didáctico.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.

SIERPINSKA, A. (1988). Epistemological remarks on functions. *Proceedings of the Twelfth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* . Vesprem. Hungary, pp 568-575.

TALL, D. (1992). The transitión to advanced mathematical thinking: functions, limits, infinity, and proof. En: D. Tall (Ed), *Advanced mathematical thinking.* Kuwer Academic Publishers. Netherlands.

VINNER, S. (1983) Concept definition, concept image and the notion of function. *The International Journal of Mathematical Education in Science and Tecnology, 14,* 293-305.

VINNER, S. y HERSHKOWITZ, R. (1980). Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts. *Proceedings of the Fourt International Conference for the Psichology of Mathematics Education.* Berkeley, CA., pp 177-184.

ANEXO

ALUMNNO ....CURSO ....
CENTRO ....PROVINCIA

1. Escribe una definición de función

2. ¿Es lo mismo función que ecuación?. Si no es lo mismo, explica por qué.

3. A un alumno se le pide que ponga un ejemplo del gráfico de una función que pase por los puntos A y B (figura 1). El estudiante da la respuesta de la fig. 2

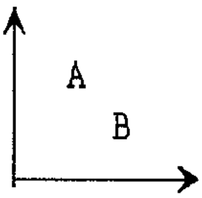


Fig. 1

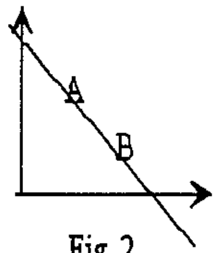
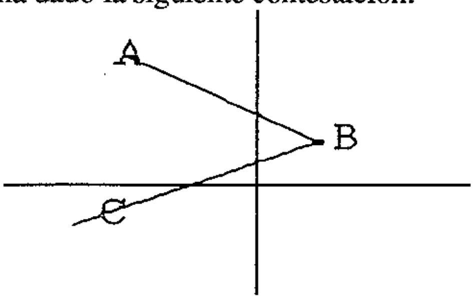


Fig. 2

Cuando se le pregunta si hay otra respuesta el estudiante dice: "No"

* Si piensas que el alumno tiene razón. Explica por qué
* Si piensas que el alumno está equivocado, ¿Cuántas funciones que satisfacen la condición puedes encontrar?. Razona la contestación

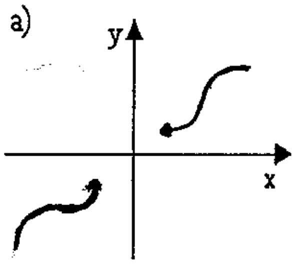
4. Preguntado un alumno sobre cómo sería la gráfica de una función que pase por los puntos A,B, C, ha dado la siguiente contestación:



¿Es correcto?, ¿hay otra respuesta correcta?. Da un ejemplo.¿Puedes encontrar otro? ¿Cuantos?
Si no, ¿Cúal sería la respuesta correcta?

5. **R** es el conjunto de los números reales y **N** el conjunto de los números naturales. Un alumno dice que las expresiones de *a)* a *f)* **no son funciones.**

a)



b) $f: R \rightarrow R$
$f(x) = 4$

c) $g: N \rightarrow R$

d) Una correspondencia que asocia el número 1 con cada número positivo, el -1 con cada número negativo y el 3 con el 0.

e) $g(x) = \begin{cases} x, \text{ si x es un número racional} \\ 0, \text{ si x es un número irracional} \end{cases}$

f) $\{(1,4), (2,5), (3,9)\}$

Para cada uno de los casos anteriores, contesta si el estudiante acertó o se equivocó. Razona cada una de sus decisiones

a) Correcto ....Equivocado. .... ¿por qué?

b) Correcto ....Equivocado .... ¿por qué?

c) Correcto ....Equivocado .... ¿por qué?

d) Correcto ....Equivocado .... ¿por qué?

e) Correcto ....Equivocado .... ¿por qué?

f) Correcto ....Equivocado .... ¿por qué?

ALUMNNO .... CURSO ....

CENTRO .... PROVINCIA

Apdo 1. Definición de función	**Apdo 2. ¿Es lo mismo función que ecuación?**
Incluye	SI NO
Correspondencia	
Aplicación	Diferencias:
Correspondencia unívoca	
Regla de formación	
Expresión matemática	
Fórmula	
Ecuación	
Gráfica	
Otro tipo de representación	
Expresión y representación	
Correspondencia y expresión	
Existencia de variables	

Apdo 3. Gráfica que pasa por dos puntos	**Apdo 4. Gráfica que pasa por tres puntos**
Dominio lineal	Dominio lineal
Infinitas funciones	Univocidad
Gráficas familiares	Infinitas funciones
Gráficos bonitos, regulares	Gráficas familiares
	Gráficos bonitos, regulares

Apdo.5. Reconocimiento de funciones	**Apdo 5. Reconocimiento de funciones**
Correspondencia	Dominio linea recta
Univocidad	Necesidad de variables
Siempre repesentables	Dominio igual a rango
Gráficos admisibles, regulares	Dominio contenido en rango
Gráficos familiares	

Concepto Definición				Concepto Imagen								
Defini- moder na	Represen tación	Expre- sión	Incluye univoc.	Aplica corres.	Siempre represen	Gráficos bonitos regulares	Gráficos familiar	Univoci dad	Domina línea recta	Necesita variables	pares, si corresp.	domin= rango

i.e.p.s.

instituto de estudios
pedagógicos somosaguas

Vizconde de Matamala 3
28028 MADRID