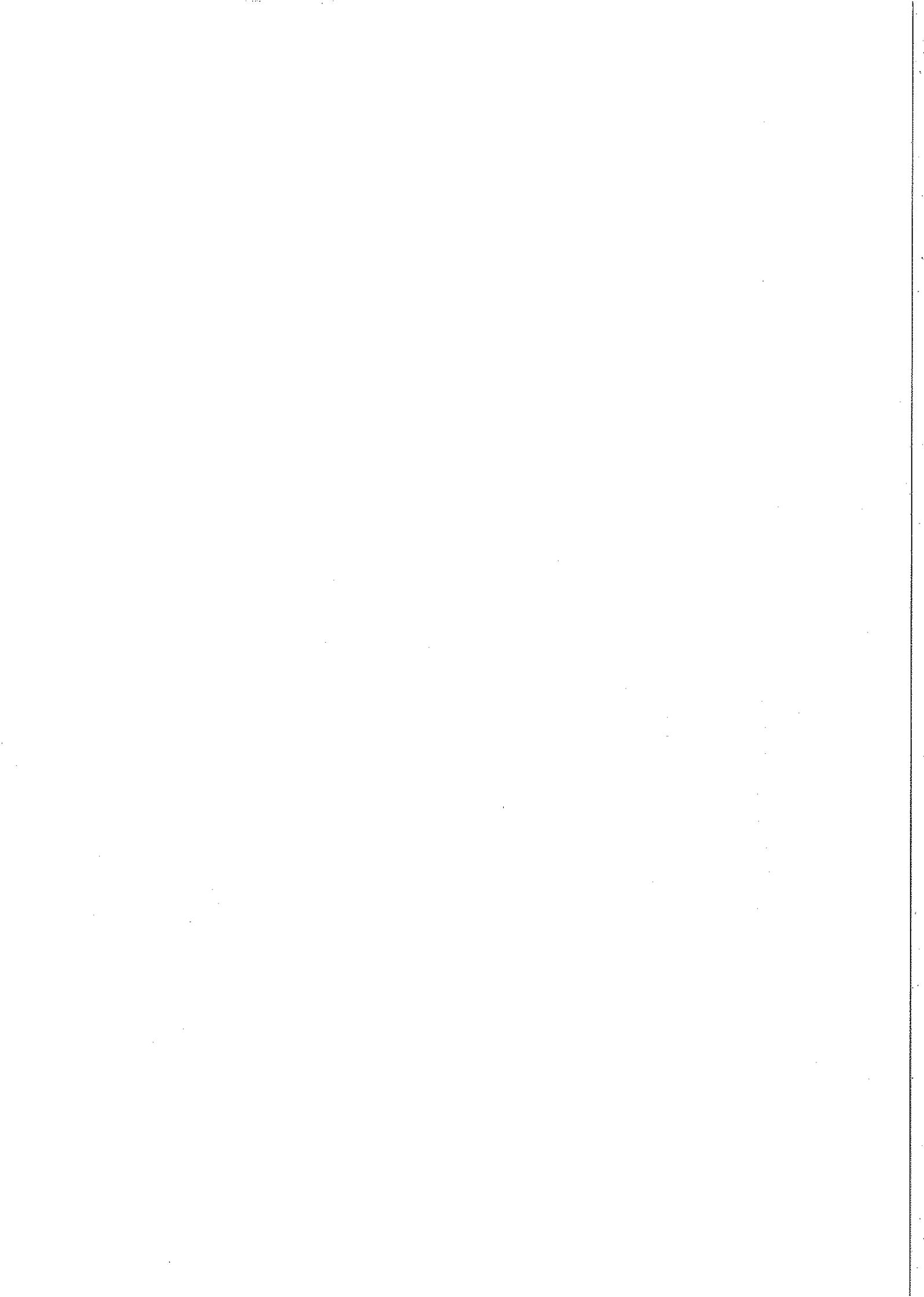


documentos i.e.p.s.

**ORIENTACIONES PARA LA ELABORACIÓN
DE UNIDADES DIDÁCTICAS
Área de Matemáticas**

María Luz Callejo de la Vega
Departamento de Didáctica de las Matemáticas
I.E.P.S.

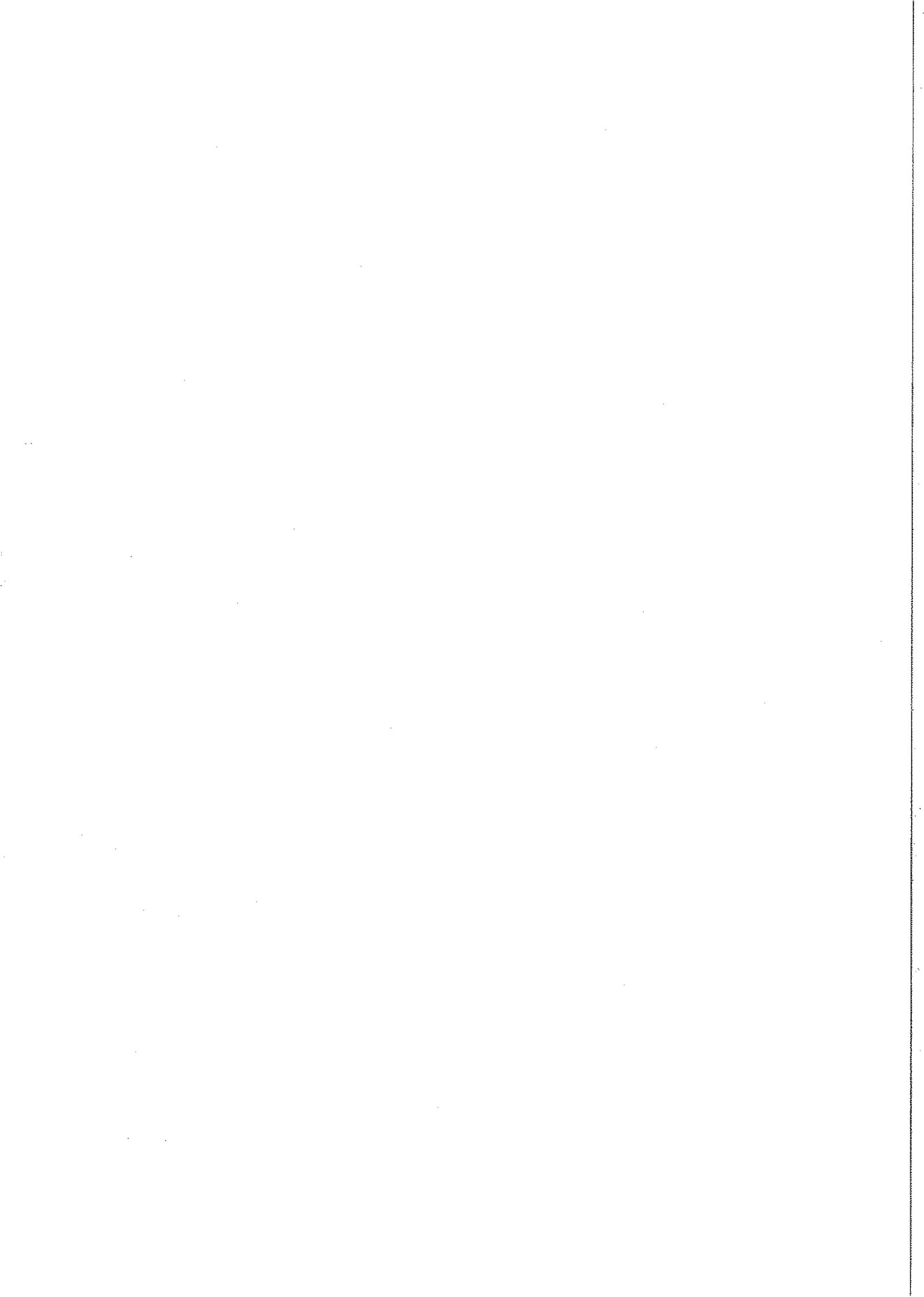
**monografías
n° 13**



**ORIENTACIONES PARA LA ELABORACION
DE UNIDADES DIDACTICAS
Area de Matemáticas**

María Luz Callejo de la Vega.
Dto. Didáctica de las Matemáticas
I.E.P.S.

Depósito Legal: M-34541-1992



El material de esta Monografía lo he ido elaborando de manera progresiva con la ayuda de la reflexión y de la práctica de especialistas en educación y en didáctica y de profesores de matemáticas. Quiero destacar el Seminario de estudio sobre "Diseño de Unidades Didácticas" celebrado en el Instituto de Estudios Pedagógicos Somosaguas (IEPS) durante el curso 1991-1992; el curso de Actualización Científico Didáctica, modalidad A, que tuvo lugar en Soria entre Julio de 1991 y Mayo de 1992, cuyos participantes elaboraron y experimentaron en sus aulas distintas Unidades Didácticas para la etapa Secundaria Obligatoria y, por último, el Proyecto sobre Resolución de Problemas desarrollado en el Col.legi Pedro Poveda de Palma de Mallorca durante varios cursos, en el que se experimentaron en las aulas de 1º y 2º de Secundaria diversas actividades de enseñanza-aprendizaje que cristalizaron en la Unidad Didáctica "Juegos de estrategia I" que aquí se presenta.

Soy por tanto deudora de las ideas y de las experiencias de muchas personas, entre ellas, Carmen Barrientos, Berta Marco, Engracia Olivares y Teresa Serrano, del IEPS, que me proporcionaron sus materiales; M^a José Ruiz que me confió la tutoría para la elaboración de las Unidades Didácticas del curso que dirigió en Soria y Mateo Tugores que experimentó con sus alumnos de Secundaria los materiales de la Unidad Didáctica "Juegos de Estrategia I" y me facilitó siempre la entrada y la experimentación en sus clases.

La autora

INDICE

Introducción	3
Materiales para la elaboración de Unidades Didácticas en el área de matemáticas _____	5
1. Concepto de Unidad Didáctica	7
2. Fases en el diseño de Unidades Didácticas	8
3. Planteamientos previos al diseño de Unidades Didácticas	9
4. Elementos constitutivos de una Unidad Didáctica	13
5. Estrategias didácticas privilegiadas por el enfoque constructivista del aprendizaje de la matemática	20
6. Experimentación de una Unidad Didáctica: elementos para la evaluación por parte del profesorado	27
7. Evaluación de recursos: Unidades Didácticas	28
8. Anexos	32
9. Bibliografía	35
Unidad Didáctica <i>Juegos de estrategia I</i> _____	41
Guía del profesor	43
Anexos	51
Actividades para el alumno	63

INTRODUCCION

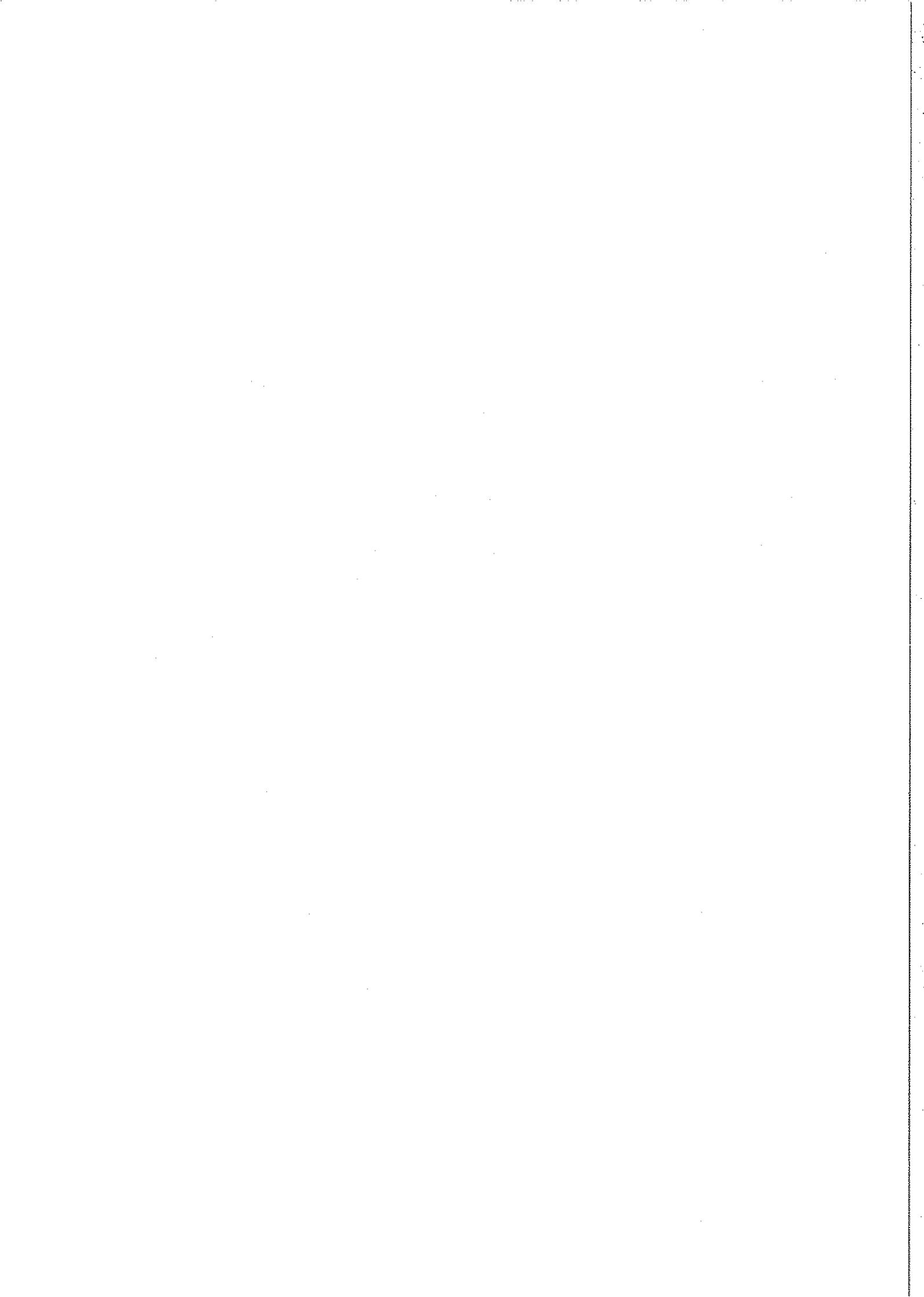
Esta Monografía quiere ofrecer al profesorado del área de matemáticas orientaciones para la elaboración de Unidades Didácticas. Consta de dos partes:

- La primera es un conjunto de materiales que han resultado prácticos a distintos grupos de profesores que han elaborado Unidades Didácticas. Estos materiales tratan de dar respuesta a diversas preguntas:

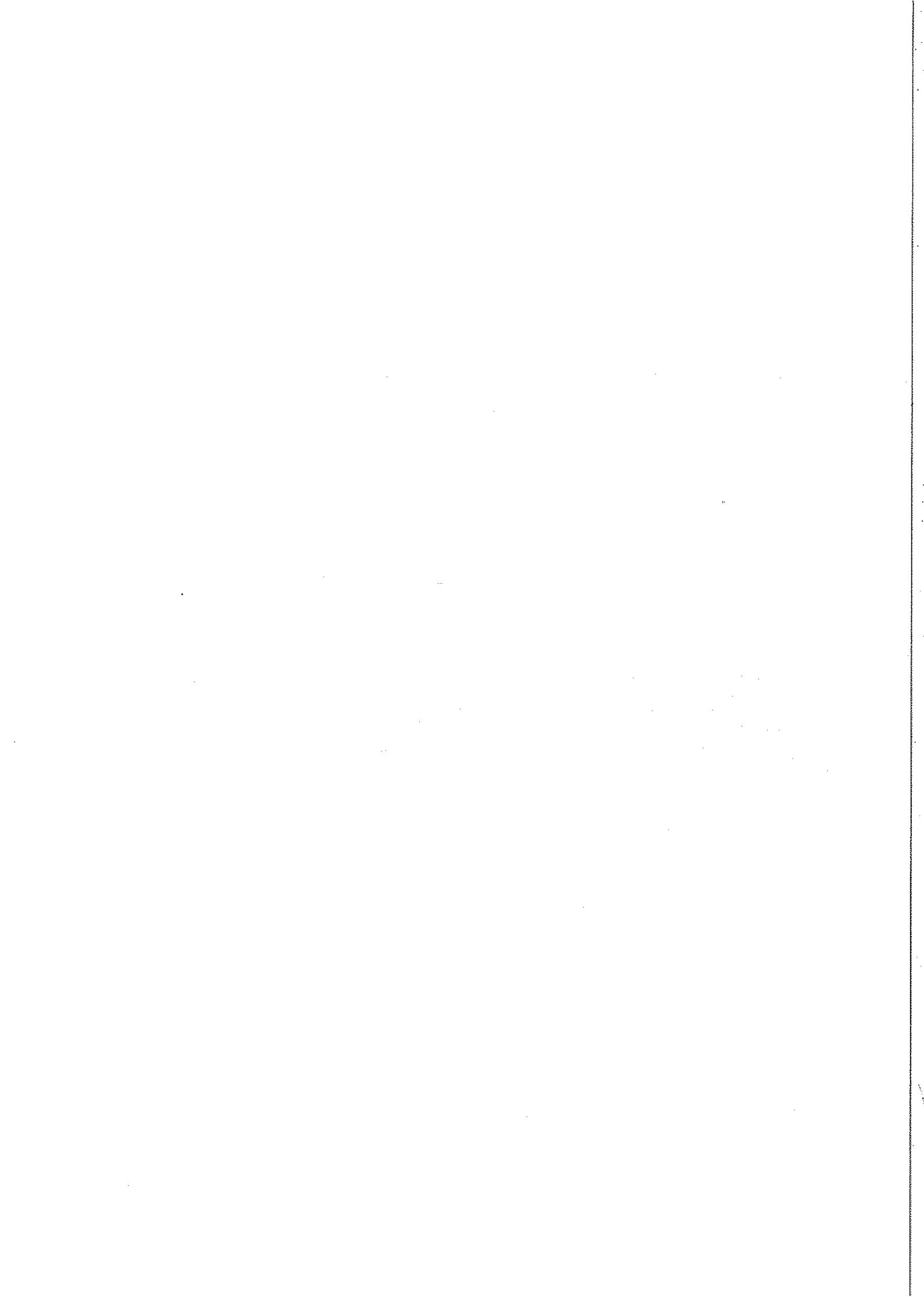
¿Qué es una Unidad Didáctica?,
¿Qué momentos pueden señalarse en el proceso de elaboración de una Unidad Didáctica?,
¿Qué aspectos conviene tener claro antes de desarrollar una Unidad Didáctica?,
¿Cuáles son los elementos que constituyen una Unidad Didáctica?,
¿Cómo se puede mejorar una Unidad Didáctica a partir de su experimentación en el aula?
y , por último,
¿Cómo evaluar una Unidad Didáctica?

- La segunda parte es una Unidad Didáctica sencilla planteada para introducir a los alumnos del primer ciclo de E.S.O. en la resolución de problemas matemáticos, centrada en los *Juegos de Estrategia*.. Con ella se ejemplifican algunas de las ideas expuestas en la primera parte.

Estos documentos se han creado para trabajarlos, junto con otros, en cursos sobre Diseño y Elaboración de Unidades Didácticas en el marco de los *Cursos de Verano* y de los *Cursos de Invierno* del IEPS.



**MATERIALES
PARA LA ELABORACION
DE UNIDADES DIDACTICAS**



1. CONCEPTO DE UNIDAD DIDACTICA

En el documento "Diseño y desarrollo curricular" del MEC se encuentran dos párrafos alusivos a las Unidades Didácticas. El primero se refiere a las U.D. dentro de los niveles de concreción curricular y dice así:

*" Las decisiones que se tomen en el Proyecto curricular de Centro(PCC) serán el marco de referencia para el tercer nivel de concreción: las programaciones. Los acuerdos que se tomen en el centro relativos a los objetivos de ciclo se desarrollarán posteriormente en estas programaciones, que los profesores diseñarán de manera más o menos explícita para articular el proceso de enseñanza y aprendizaje de su grupo de alumnos. En estas programaciones, que pueden referirse a una o a varias áreas, se establecerá una secuencia ordenada de las **unidades didácticas** que se vayan a trabajar durante el ciclo que tenga a su vez en cuenta el conjunto de la etapa" (p. 28)*

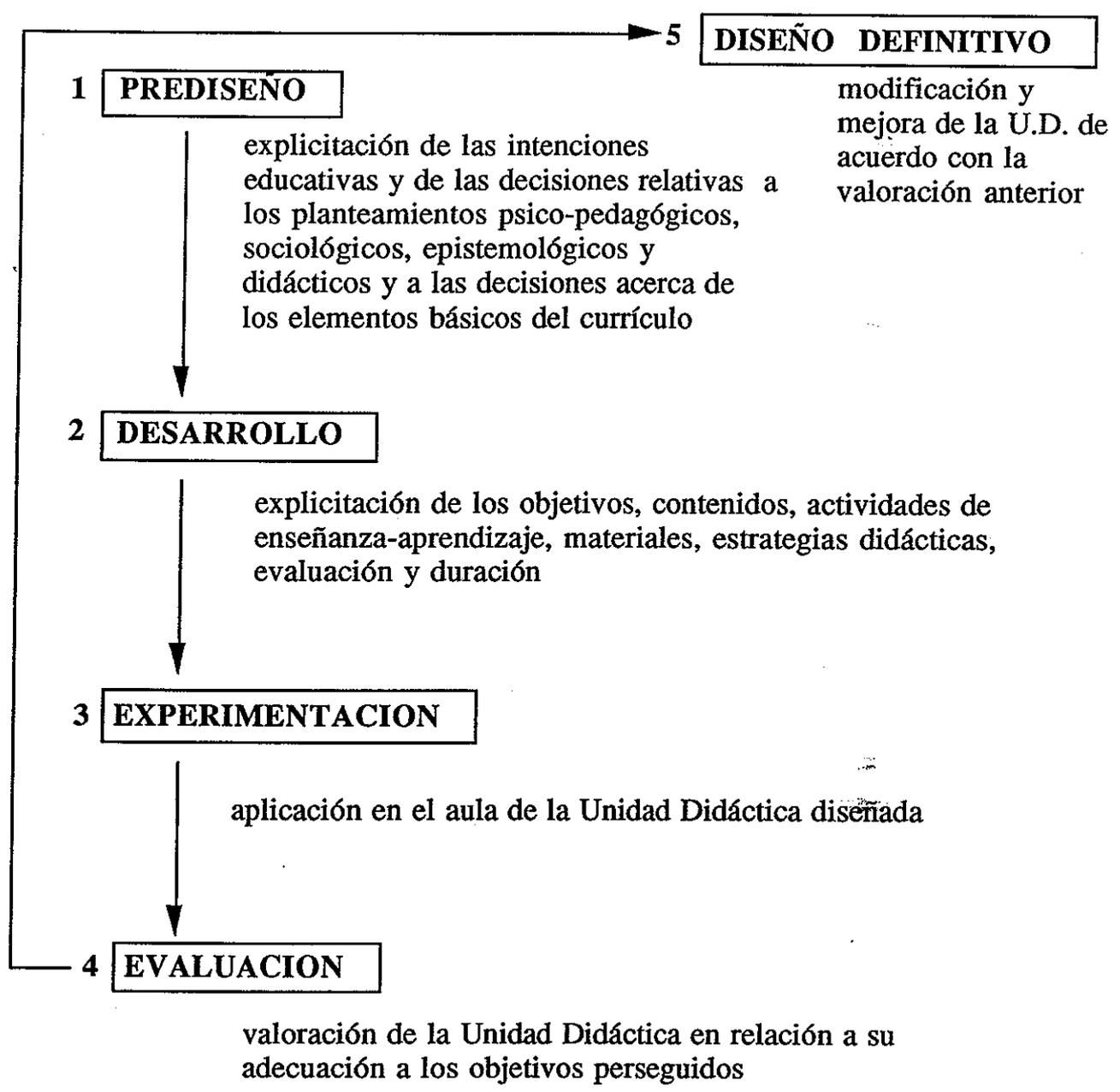
Un esquema de los niveles de concreción curricular puede verse en el Anexo 1.

El segundo expresa el concepto de Unidad Didáctica:

*" La **unidad didáctica** se entiende como una unidad de trabajo relativa a un proceso de enseñanza-aprendizaje, articulado y completo. En ella se deben precisar por tanto los contenidos, los objetivos, las actividades de enseñanza-aprendizaje y las actividades para la evaluación. Estos elementos deben tener en cuenta los diferentes niveles de la clase y desarrollar en función de ellos las necesarias adaptaciones curriculares" (p. 53)*

(Diseño y desarrollo curricular, MEC, Madrid, 1989)

2. FASES EN EL DISEÑO DE UNIDADES DIDACTICAS



3. PLANTEAMIENTOS PREVIOS AL DISEÑO DE UNIDADES DIDÁCTICAS

La elaboración de Unidades Didácticas requiere explicitar tanto aspectos referidos a las fuentes del currículo¹, esto es, aspectos de tipo psico-pedagógico, epistemológico y sociológico en relación con el proceso de enseñanza-aprendizaje que se desea desarrollar en dicha unidad, como las decisiones relativas a los elementos básicos del currículo: para qué, qué, cómo y cuándo enseñar y evaluar.

1. Planteamientos relativos a las fuentes del currículo:

1. *Planteamientos psico-pedagógicos*

Se explicita la concepción del proceso de enseñanza-aprendizaje, según las teorías constructivistas:

- el alumno como agente del propio aprendizaje
- el profesor como mediador del proceso

2. *Planteamientos sociológicos*

Se explicitan las características sociológicas del alumnado y del centro educativo que se deseen tener en cuenta en la Unidad Didáctica

3. *Planteamientos epistemológicos*

Se expresa la forma concreta de abordar las matemáticas dentro del enfoque del Currículo Básico.

4. *Planteamientos didácticos*

Se explicita la aplicación de los planteamientos psico-pedagógicos, sociológicos y epistemológicos a la situación concreta de proceso de enseñanza-aprendizaje que constituye la U.D. atendiendo a:

a) Características de los alumnos

- Capacidad intelectual.
- Motivación de los alumnos hacia el tipo de aprendizaje que se propone.
- Conocimientos previos requeridos para el desarrollo de la U.D. según el lugar de la misma dentro de la programación de contenidos

b) Circunstancias del desarrollo de la U.D.

- comienzo, transcurso, final de etapa

¹ Se puede ver un esquema sobre las fuentes del currículo en el Anexo 2 y otro sobre los elementos básicos del currículo en Anexo 3

- comienzo, transcurso, final de ciclo
- comienzo, transcurso, final de curso
- comienzo, transcurso, final de trimestre

2. Decisiones relativas a los elementos básicos del currículo

Decisiones relativas al QUE y PARA QUE enseñar y evaluar:

- Contextualizar la unidad didáctica dentro del Proyecto Curricular de Centro (PCC) y de la programación.
- Elegir un enfoque que presida el desarrollo de la unidad didáctica:
 - histórico;
 - heurístico;
 - interdisciplinar;
 - centro de interés;
 - instrumental;
 - otros.
- Ver qué contenidos va a cubrir la unidad didáctica
- Elaborar un mapa conceptual o una trama conceptual que exprese la relación entre los contenidos y las relaciones lógicas entre los mismos
- Planificar los contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales
- Concretar unos objetivos para la unidad didáctica:
 - objetivos generales (uno o varios del Proyecto Curricular de Área - PCA);
 - objetivos específicos (explicitan el nivel de desarrollo y concreción de los objetivos generales)
- Determinar qué aspectos se van a evaluar:
 - memorización de definiciones, reglas, propiedades, etc.
 - comprensión de nociones y demostraciones
 - aplicación de conceptos y automatismos
 - traducción de lenguajes (natural, algebraico, gráfico, numérico, etc.)
 - destrezas manipulativas
 - estimación de magnitudes y de resultados
 - resolución de problemas
 - utilización de recursos (calculadora, documentos, ordenador, etc)
 - trabajo en grupo
 - actitudes: interés, motivación, esfuerzo, perseverancia, etc.

y la finalidad de la evaluación:

- diagnóstico
 - formativa
 - sumativa
- Planificar el tipo de estrategias didácticas

Decisiones relativas al COMO enseñar y evaluar:

- Establecer unos criterios metodológicos:
 - modelo de enseñanza subyacente
 - centrado en los aspectos afectivos del sujeto: modelos personalistas;
 - centrado en las interacciones sociales entre los sujetos: modelos sociales;
 - centrado en el desarrollo intelectual de los sujetos: modelos conductistas y constructivistas
 - modo de intervención del profesor:
 - expositor de ideas
 - guía o mediador de la actividad de los alumnos
 - estrategias didácticas:
 - atendiendo a la actuación del profesor (clase expositiva, moderador de un debate o de una puesta en común, guía del trabajo personal o en grupo de los alumnos, ...)
 - atendiendo al modo de trabajo de los alumnos desde el punto de vista de su agrupamiento (trabajo individual o en grupo, trabajo cooperativo, discusión, ...);
 - atendiendo al tipo o método de trabajo del alumno desde el punto de vista de la naturaleza de la actividad (ejercicios, investigaciones, resolución de problemas, juegos, simulaciones, comentario de textos, redacción de informes, diario de clase, centro de interés, visitas);
- Seleccionar o elaborar las actividades de los alumnos indicando:
 - objetivo de la actividad;
 - metodología, tipo de estrategia, materiales necesarios, etc.
 - temporalización.
- Seleccionar los recursos materiales necesarios (materiales manipulables, fotocopias, libros, medios audiovisuales, calculadoras, etc.)
- Planificar el modo de evaluación
 - observación directa del trabajo de clase

- exposiciones orales en clase
- pruebas escritas: objetivas, abiertas, con libros
- autoevaluación
- trabajos escritos: informes, carteles, cuaderno del alumno
- encuestas
- Determinar si la evaluación va a ser normativa o criterial
- Hacer las necesarias adaptaciones curriculares

Decisiones relativas al CUANDO enseñar y evaluar:

- Temporalizar la unidad didáctica
- Especificar las estrategias didácticas que se van a utilizar cada fase de la unidad didáctica, es decir:
 - actividades de introducción;
 - actividades de desarrollo;
 - actividades de recapitulación.
- Determinar los momentos de la evaluación

4. ELEMENTOS CONSTITUTIVOS DE UNA UNIDAD DIDACTICA

1. Enfoque de la unidad didáctica:

Desde el punto de vista de la organización de los contenidos

- Globalización :

Promueve un tipo de aprendizaje en relación con el contexto, agrupando los contenidos en relación a los intereses inmediatos de los alumnos (centros de interés), o bien en relación a un ámbito concreto de su experiencia. (Ejemplos: Organización de una excursión, Preparación de un menú para una celebración, El servicio de Correos, La energía en el hogar, Formas y modelos, Juegos de azar, etc.). Esta perspectiva metodológica es recomendable en la etapa Primaria.

- Interdisciplinariedad:

Promueve un proceso de aprendizaje que pone de manifiesto las múltiples relaciones que hay entre las matemáticas y otros ámbitos de conocimiento. Estas relaciones pueden darse de diversas formas:

1. Tratando de organizar la realidad mediante la construcción de un modelo matemático que explique y dé cuenta de la misma, por ejemplo un modelo explicativo de un fenómeno físico o químico.
2. Resolviendo problemas ajenos a la matemática con herramientas de esta disciplina, por ejemplo reproducir la esfera terrestre, que es una superficie no desarrollable, sobre un plano, con ayuda de las proyecciones.
3. Sirviendo como lenguaje para expresar datos cuantitativos de la realidad: representaciones gráficas, gráficas de funciones, fórmulas, etc. que luego pueden ser procesados para obtener o predecir nuevas informaciones.

- Integración de contenidos:

Promueve una integración las diferentes ramas de la Matemática. Esto puede hacerse a partir de ejes integradores como las grandes estructuras de la Matemática (algebraicas, topológicas y de orden), modelo que se adoptó en la denominada Matemática Moderna , lo que comporta un alto nivel de abstracción, o a través de situaciones problemáticas que sirvan como punto de partida para abordar nuevos temas y cuya resolución comporta la aplicación de conocimientos que no sean necesariamente específicos de un dominio matemático.

- Organización en paralelo :

Promueve el estudio por separado de los contenidos específicos de cada rama de la Matemática (Aritmética, Geometría, Algebra, etc.), lo que no impide que se den

interacciones entre estas partes de la Matemática, por ejemplo aplicar el Álgebra a la resolución de problemas geométricos, gracias a la Geometría analítica.

Desde el punto de vista de la concepción de las matemáticas

- Heurístico:

La matemática es saber-hacer más que saber, método más que contenido. Desde este enfoque se trata de introducir los conceptos a partir de la situación que ha dado origen a su aparición, se presentan los teoremas sin ocultar la sucesión de tentativas que precedieron el establecimiento de los mismos y se considera el proceso de búsqueda, de creación, de tanteos, de inferencias, de comprobaciones, propio de la resolución de problemas como el corazón de la actividad matemática.

- Instrumental:

Desde este enfoque la educación matemática trata de desarrollar en el alumnado las habilidades matemáticas necesarias para la vida adulta, para la vida profesional y para otras disciplinas. Se privilegian las destrezas y mecanismos necesarios para aplicar a estas situaciones.

2. Título de la unidad:

- Determinado a partir de un contenido-eje de la unidad temática (Ej.: La parábola)
- Determinado por un tema que conecta con los intereses de los alumnos y es objeto de un aprendizaje interdisciplinar (Ej.: Una excursión a un planetario).
- Determinado por un tema transversal o problema que es eje de integración de los contenidos disciplinares de la unidad y puede trabajarse interdisciplinariamente con otras áreas (Ej.: Planos y mapas).

3. Objetivos:

- **Objetivos generales**
(Uno o varios objetivos del Proyecto Curricular de Área).
- **Objetivos didácticos**
(Explicitan el nivel de desarrollo y concreción de los objetivos generales).

4. Contenidos:

- **Contenidos que se van a tratar:** Tipos (conceptuales, procedimentales, actitudinales).
- **Pre-requisitos del aprendizaje**

- Secuenciación de los contenidos

5. Actividades de enseñanza - aprendizaje

Descripción de actividades

- Objetivo de la actividad
- Metodología, tipo de estrategia, materiales, etc.
- Temporalización

Agrupamiento de actividades

Se distribuyen los contenidos con relación a las distintas fases del desarrollo de la unidad de trabajo:

a) Actividades de introducción a la U.D.

Conjunto de actividades orientadas a la consecución de objetivos relacionados con el planteamiento de la situación educativa que va a desarrollarse.

Ejemplos:

- Motivar a los alumnos hacia el tema de la unidad
- Activar los conocimientos previos de los alumnos para que se manifieste qué saben, qué saben hacer y cuáles son sus actitudes en relación con la unidad de trabajo que se plantea
- Relacionar el tema con otros ya trabajados
- Suscitar interrogantes
- Plantear las distintas formas de trabajo que se van a adoptar en el transcurso de la unidad

b) Actividades de desarrollo de la U.D.:

Conjunto secuenciado de actividades orientadas a la consecución de objetivos relacionados con el desarrollo de determinadas capacidades.

Ejemplos:

- Adquirir nuevos conocimientos y / o reorganizar los que ya se tienen
- Resolver un determinado problema
- Realizar ejercicios de rutinas básicas
- Trabajar de forma práctica con instrumentos de medida y dibujo
- Construir y utilizar modelos matemáticos materiales
- Simular un fenómeno
- Comprender enunciados y textos matemáticos. Clasificar con relación a uno o más criterios
- Desarrollar una investigación

- Confrontar ideas
- Desarrollar actitudes críticas
- Debatir temas
- Establecer consensos
- Llegar a conclusiones
- Formular los conocimientos adquiridos
- Aplicar los nuevos aprendizajes

c) Actividades de recapitulación de la U.D.:

Conjunto secuenciado de actividades orientadas a la síntesis, relación y evaluación de los aprendizajes realizados en el transcurso de la unidad, así como a la valoración del proceso seguido y de los medios empleados para el logro de dichos aprendizajes.

Ejemplos:

- Actividades de síntesis de los distintos tipos de contenidos trabajados en la unidad, en relación con el tema de la misma
- Actividades orientadas a apreciar los cambios ocurridos en los conocimientos de tipo conceptual, procedimental o actitudinal, con relación a los manifestados en la fase introductoria
- Actividades orientadas a establecer relaciones con otros campos
- Actividades orientadas a evaluar el clima en que se ha desarrollado la unidad

6. Materiales:

Tipos de materiales:

- Materiales escritos: libros de consulta, de divulgación, de historia, de problemas, de juegos lógicos y matemáticos, sobre temas monográficos, libros de texto diversos, ilustraciones gráficas, etc; fichas de problemas y de actividades prácticas, etc.
- Materiales manipulables: geoplano rectangular o circular, el ábaco, la máquina de Galton, dados de diferentes tipos, cartas de baraja, ruletas, libro de espejos, engranajes de "meccano", cuerpos geométricos, policubos, cubos de estiropor, rompecabezas, etc.
- Medios audiovisuales: retroproyector, video, proyector de diapositivas
- Calculadoras
- Ordenadores

Criterios para la elaboración o selección de materiales didácticos

Se establecen criterios de elaboración o de selección de materiales atendiendo a la función de los mismos en las distintas fases de la unidad de trabajo.

a) Materiales de introducción a la unidad temática

- Cómo motiva el aprendizaje
- Cómo activa los conocimientos previos (lluvia de ideas, coloquios...)
- Qué relaciones establece con otras experiencias, actividades, temas...
- Qué interrogantes suscita
- Otros medios

b) Materiales para el desarrollo de los contenidos de la unidad temática

- Cómo ayudan a desarrollar conceptos y procedimientos.

Ejemplos:

- Mediante el conflicto cognitivo: suscitando interrogantes que orientan la atención del alumno hacia la resolución del conflicto
- Mediante la reflexión guiada
- Orientando procesos: actividades que ayudan a la adquisición de conceptos y al desarrollo de procedimientos
- Otros medios

- Cómo ayudan a construir conceptos.

Ejemplos:

- Orientando hacia conclusiones
- Orientando hacia la identificación de datos comunes
- Orientando hacia la generalización de los nuevos contenidos
- Otros medios

- Cómo ayudan a fijar contenidos

Ejemplos:

- Mediante actividades de aplicación
- Mediante ejercicios de repetición y memorización
- Otros medios

- Cómo ayudan a desarrollar actitudes

Ejemplos:

- Mediante propuestas de modelos
- Mediante propuestas de normas
- Mediante actividades orientadas al desarrollo de actitudes críticas
- Otros medios

c) Materiales para la recapitulación y síntesis de los contenidos de la unidad temática

- Cómo ayudan a relacionar los contenidos de la unidad con otros campos
- Cómo ayudan a sintetizar los aprendizajes realizados en relación con el tema de la unidad.
- Cómo ayudan a apreciar los cambios ocurridos en los conocimientos de los alumnos (de tipo conceptual, procedimental o actitudinal), con relación a los manifestados en la fase introductoria.
- Cómo ayudan a apreciar el aprendizaje del alumnado en el desarrollo de actitudes.

Material del profesor:

- Mapas conceptuales
- Guías didácticas
- Selección bibliográfica
- Cintas de vídeo, diapositivas, fotos
- Programas de ordenador
- Otros materiales.

7. Estrategias didácticas

Atendiendo a la actuación del profesor.

Ejemplos:

- Exposición de actividades. - Explicación didáctica .- Coordinación de puestas en común, debates, coloquios...

Atendiendo al modo de trabajo de los alumnos desde el punto de vista de su agrupamiento.

Ejemplos:

- Trabajo individual.- Trabajo en grupo...

Atendiendo al tipo de trabajo individual.

Ejemplos:

- Estudio. - Resolución de ejercicios. - Resolución de problemas. - Lectura de textos matemáticos. - Realización de un informe.- Exploración bibliográfica ...

Atendiendo al método de trabajo en grupo

- Trabajo en equipo.- Resolución de problemas. - Proyectos de trabajo.- Discusión en grupo.- Puesta en común.- Debates.- Comentarios...

8. Evaluación

Explicitación de las formas de evaluación:

Se explicitan las formas de evaluación inicial, del proceso y final atendiendo a los aspectos siguientes:

- El aprendizaje de los alumnos
- La actitud de los alumnos hacia los diferentes aprendizajes de la unidad
- Las tareas realizadas en relación con los conocimientos previos
- La participación en los grupos de trabajo, clima...

Evaluación de la unidad didáctica:

Se realizan los ajustes que se crean convenientes a la luz de los resultados anteriores.

9. Duración:

Se recomienda brevedad, entre 10 ó 20 horas, así como la conveniencia de utilizar períodos de clase que oscilen entre 90 y 100 minutos, pero siempre la duración deberá determinarse en función de:

- la edad de los alumnos
- el grado de profundidad y extensión requerido por los contenidos de aprendizaje
- al número de relaciones que deseen establecerse, o convenga establecer, entre los tipos de contenidos y las distintas disciplinas del área.

5. ESTRATEGIAS DIDACTICAS PRIVILEGIADAS POR EL ENFOQUE CONSTRUCTIVISTA DEL APRENDIZAJE DE LA MATEMATICA

El contexto de aprendizaje

El modelo constructivista del aprendizaje requiere que el profesor seleccione **situaciones problemáticas** y trate de crear un clima de libertad para que los alumnos puedan expresarse con espontaneidad. La dinámica de la clase se puede desarrollar en un ciclo que comporta varias etapas:

- **Orientación del trabajo:** el profesor puede comenzar presentando la situación problemática a todos los alumnos o entregarla por escrito a cada estudiante. Es importante que se asegure de que todos los estudiantes la han comprendido.

- **Trabajo exploratorio en grupo:** los estudiantes pueden comenzar abordando la tarea individualmente y luego en grupo o directamente en pequeños grupos de 5 o 6 alumnos como máximo. Para que el trabajo en grupo sea eficaz, un estudiante puede hacer de **moderador** y otro de **secretario**, anotando el proceso de resolución. De esta forma se promueve la comunicación y la discusión entre los miembros del grupo que tratarán de encontrar juntos la solución.

- **Confrontación de ideas :** mientras los alumnos trabajan en grupo, el **profesor** sirve de **guía** a los estudiantes, animándoles a comprobar los resultados, ofreciéndoles contraejemplos que les ayuden a profundizar en sus ideas, abriéndoles nuevas pistas, desbloqueando situaciones, sugiriendo generalizaciones. Si los alumnos siguen una línea de razonamiento que al profesor no le resulta familiar o que aparentemente es infructuosa, el profesor deberá seguirla atentamente hasta verificar si es buena o no (¡puede llevarse una sorpresa!).

- **Revisión:** al final de la sesión se dedica un tiempo a **discutir en clase:** los grupos presentan a toda la clase, (no solo al profesor), sus soluciones y cómo llegaron a ellas, para discutir las. En el proceso de decir a otros cómo se ha pensado en un problema, se elabora, se perfila y se profundiza el propio pensamiento. El profesor debe facilitar la libre expresión de los alumnos y no enjuiciar las soluciones, ya sean buenas o malas pues esto bloquea el diálogo, impide una discusión fluida y predispone a los estudiantes a buscar "la" respuesta esperada por el profesor, más que a exponer sus propios razonamientos. Por el contrario, el profesor tratará de "negociar" con los alumnos las soluciones propuestas y trabajará con ellos para llegar a un consenso. Debe intentar comprender las diferentes aproximaciones de los estudiantes a la situación, sean adecuadas o no; en este último caso tratará de ver en qué medida pueden serlo.

- **Aplicación:** se debe dar a los alumnos la oportunidad de aplicar sus nuevos conocimientos a situaciones análogas proponiéndoles **problemas de aplicación y ejercicios** para reforzar los contenidos claves que deben construir.

Este ciclo se puede desarrollar en una o varias sesiones de una hora aproximadamente. El momento de la revisión lo deberá decidir el profesor de acuerdo con el trabajo de los alumnos, para que esta fase resulte provechosa. En cualquier caso, todos los alumnos han debido disponer de tiempo suficiente para llegar a alguna conclusión. Si se hace en una sola sesión, no se da espacio al fenómeno de la incubación de ideas que, por otra parte, es un aspecto decisivo en la resolución de un problema.

Estrategias didácticas

a) atendiendo a la naturaleza de las actividades propuestas a los alumnos: situaciones problemáticas, problemas de aplicación y ejercicios

El corazón de este tipo de aprendizaje es un conjunto de **situaciones problemáticas** que encierran los contenidos claves de la matemática y que guiarán a los estudiantes en la construcción de los mismos. La función principal de una situación problemática es conducir a los alumnos a través de las cuestiones que ellos mismos se plantean a medida que avanzan en la búsqueda de la solución, a la utilización primero implícita y luego explícita de nuevos contenidos matemáticos. La situación problemática se presenta mediante un problema que sitúa al alumno frente a una cuestión, ante la cual está preparado para encontrar una solución y puede dar muestra de ingenio. Una situación problemática se diferencia de un **problema de aplicación** en que éste tiene por objetivo hacer tomar conciencia al alumno de la utilidad de un contenido matemático ya presentado y tratar de reforzarlo. En este sentido, mientras la finalidad de proponer una situación problemática es crear en el alumno un conflicto cognitivo o un desequilibrio para que a continuación reestructure sus conocimientos gracias a los nuevos aprendizajes, la finalidad que persigue el profesor al plantear un problema de aplicación es que el alumno actualice sus conocimientos aplicándolos a una nueva situación. A veces la diferencia entre una situación problemática y un problema de aplicación es relativa al contexto en que se plantean y a los conocimientos matemáticos del alumno al que va dirigido.

En resumen, las diferencias entre una situación problemática y un problema de aplicación son las siguientes:

SITUACION PROBLEMÁTICA	PROBLEMA DE APLICACION
Crear en el alumno un conflicto cognitivo o un desequilibrio para introducir un nuevo contenido.	Aplicar los conocimientos matemáticos a una situación nueva.

Tratar que el alumno investigue y se familiarice con la situación para tratar de darle una respuesta.	Tratar que el alumno tome conciencia de la utilidad de un contenido matemático en la resolución de un problema.
Tratar de que el alumno reconozca la necesidad de aprender nuevos contenidos.	Tratar de reforzar los contenidos.

Una situación problemática debe pues reunir la siguientes características:

1. *Los alumnos deben comprender los datos e intentar la exploración de la situación con los conocimientos actuales. Pueden concebir claramente lo que es una respuesta posible y pertinente a la cuestión propuesta.*

Ejemplo 1: Cuando los alumnos conocen la suma pero no la resta, se le puede presentar esta situación :

$$\begin{array}{r} 4 \\ +\square \\ \hline 7 \end{array}$$

u otra más complicada con número de varias cifras.

Ejemplo 2: Cuando los alumnos conocen la suma, la resta y la multiplicación, pero no la división con resto, proponerle "el juego del 17":

EL JUEGO DEL 17 : Es un juego para dos jugadores. El que juega primero dice un número cualquiera del 1 al 3 .El que juega segundo le suma al número que dijo el primer jugador un número del 1 al 3 y dice el resultado. A continuación el primer jugador hace lo mismo, es decir, suma al número que dijo el otro jugador un número del 1 al 3 y dice el resultado. Así sucesivamente. Gana el que primero diga 17.

¿Tiene ventaja alguno de los jugadores? ¿Por qué? Si alguno de los dos lleva ventaja, ¿cómo debe jugar para ganar siempre?

2. *La situación problemática se refiere a un campo conceptual que se desea explorar y donde se sitúan los aprendizajes que se quieren alcanzar.*

En el ejemplo 1 se trata de la resta y en el 2 de la división con resto, presentada como resta repetida.

3. *Los conocimientos antiguos de los estudiantes son insuficientes para permitirles resolver inmediatamente el problema.*

De forma indirecta los alumnos pueden resolver el problema, pero no conocen la resta que les conduciría directamente a la solución del ejemplo 1 "lo que le falta a 4 para ser 7", ni tampoco la división con resto que les permitiría saber el primer número que tienen que decir para ganar, aunque en este caso la solución no es inmediata.

4. Los conocimientos objeto de aprendizaje ofrecen los instrumentos mejor adaptados para obtener la solución.

En nuestro caso la resta y la división con resto. Esta última les permitirá generalizar la solución a nuevas situaciones problemáticas.

5. La cuestión puede estar formulada en diferentes lenguajes (concreto, representativo o simbólico) en los que pueden operar los contenidos construidos.

En los dos ejemplos la situación está expresada en lenguaje simbólico, pero podría haberse presentado también mediante objetos o con dibujos de objetos.

Una vez aclarada la diferencia entre situación problemática y problema de aplicación, veamos cuál es la diferencia de éstos con los ejercicios. Para ello vamos a llamar "problema" tanto a la situación problemática como al problema de aplicación, tratando de especificar sus características comunes. El siguiente cuadro resume las diferencias:

PROBLEMA	EJERCICIO
A primera vista no se sabe como atacar el problema y resolverlo.	De un golpe de vista se ve inmediatamente en qué consiste la cuestión y cuál es el medio para resolverla
Para resolver un problema no basta con aplicar mecanismos o rutinas, sino que a base de búsqueda y de intuición hay que elaborar una solución profundizando en el conjunto de conocimientos y experiencias anteriores	El objetivo principal del ejercicio es aplicar de forma rutinaria conocimientos y mecanismos ya adquiridos y fáciles de identificar.
En general la resolución de un problema exige tiempo	En general la resolución de un ejercicio exige poco tiempo
La resolución de un problema exige una inversión importante de energía, de afectividad y de emotividad (frustración, alegría, ansiedad, perseverancia...)	La resolución de un ejercicio no suele comportar aspectos afectivos
Un problema está siempre abierto a posibles variantes y a nuevos problemas	Un ejercicio es una cuestión cerrada
Los problemas son escasos en los libros de texto	Los ejercicios abundan en los libros de texto

También en este caso tenemos que decir que la diferencia entre ejercicio y problema es relativo al contexto en que se propongan y al sujeto al que se le plantea: lo que para un alumno puede ser un simple ejercicio rutinario, para otro puede ser un verdadero problema.

b) *atendiendo al método de trabajo : trabajo en grupo, puesta en común y debate*

La comunicación de ideas entre los alumnos, ya sea en pequeño o en gran grupo , es otra de las características de este enfoque. A continuación presentamos unas pautas que pueden servir de orientación para este tipo de trabajo

El trabajo en grupo

El número de participantes puede estar comprendido entre 2 y 6 alumnos/as. Uno/a de ellos/ellas ha de ser el moderador/a de la sesión y otro el secretario/a.

- El *moderador/a* ha de guiar la sesión sin controlarla ni dirigirla.
- El *secretario/a* toma nota de la lista de las ideas emitidas durante la sesión.

Desarrollo de la sesión:

Comienza la sesión planteando el moderador/a el problema. La sesión se desarrollará en dos partes:

1. Exposición de ideas.
2. Selección de ideas.

Durante la *exposición de ideas* no se hace ninguna valoración de las mismas. Debe omitirse cualquier juicio o punto de vista. Se evita todo tipo de comentarios. Puede darse cualquier criterio, cualquier idea. El moderador/a ha de impedir que se critiquen las ideas emitidas.

Cuando el moderador/a considere que hay un número suficiente de ideas para seleccionarlas y valorarlas, pasará a la segunda parte de la sesión. La selección puede obedecer a distintos criterios de valoración:

- ideas de utilidad inmediata;
- áreas que requieren mayor exploración;
- nuevos enfoques del problema.

Las tareas del moderador/a son:

1. Impedir que se valoren y critiquen las ideas, sean de quien sean.
2. Evitar que más de una persona hable al mismo tiempo, que se interrumpa a otra persona o que alguien acapare la palabra.
3. Dar sugerencias cuando hay un prolongado silencio o solicitar del secretario que lea la lista de ideas.
4. Proponer el uso de alguna técnica concreta.
5. Proponer el problema al inicio de la sesión y recordarlo en caso de que la atención se desvíe del mismo.

La puesta en común o el debate

El profesor como moderador de la sesión de debate o de puesta en común tendrá que asumir una serie de tareas que favorezcan la comunicación y la interacción entre los miembros del grupo. Como antes, debe haber un primer momento de exposición de ideas, sin juzgarlas ni valorarlas, y otro de selección y debate. Entre las tareas del moderador destacamos las siguientes:

- suscitar la participación de todos los alumnos, animando a los más pasivos e impidiendo que alguien monopolice la palabra;
- impedir que se juzguen las ideas expuestas antes de llegar al momento de la selección de las mismas: en caso de que alguien no considere una conjetura pertinente, una idea plausible o una demostración verdadera, solo se le permitirá pedir explicaciones;
- impedir que se desechen ideas porque no hayan resultado útiles; por el contrario tratará de favorecer que se profundice en ellas para ver si se pueden explotar;
- propiciar el análisis de los bloqueos que se presenten en el transcurso de la resolución;
- pedir que se generalicen los datos del problema o el resultado obtenido.

c) atendiendo a la actuación del profesor/a

En el modelo constructivista del aprendizaje el profesor no es un mero transmisor del saber, sino un orientador y un guía de la actividad de los alumnos. Ello comporta:

- elegir las situaciones problemáticas, los problemas de aplicación y los ejercicios;
- orientar el trabajo individual y en grupo;
- moderar la puesta en común y el debate.

En resumen las estrategias didácticas privilegiadas por este enfoque son:

1. Atendiendo a la actuación del profesor/a, orientar y guiar la actividad de alumno/a.

Ello comporta:

- elegir las situaciones problemáticas, los problemas de aplicación y los ejercicios;
- orientar el trabajo individual y en grupo;
- moderar la puesta en común y el debate.

2. Atendiendo al modo de trabajo de los alumnos/as, desde el punto de vista de su agrupamiento:

- trabajo individual;
- trabajo cooperativo en grupo;

- puesta en común;
- debate.

3. Atendiendo a la naturaleza de la actividades propuestas:

- situaciones problemáticas;
- problemas de aplicación;
- ejercicios.

Las diferencias entre este enfoque y el modelo expositivo tradicional se pueden resumir como sigue:

	MODELO CONSTRUCTIVISTA	MODELO EXPOSITIVO
<i>Punto de partida</i>	- Se parte de la actividad del alumno proponiéndole situaciones problemáticas	- Se parte de la exposición del profesor que presenta nuevos conceptos, algoritmos, reglas o propiedades.
<i>Estilo de profesor</i>	- El profesor es facilitador de la actividad del alumno	- El profesor es transmisor de ideas e instructor
<i>Actividades</i>	- Se privilegia la resolución de problemas	- Se privilegia la realización de tareas rutinarias y de ejercicios
<i>Aprendizaje</i>	- Las matemáticas se aprenden a través de la actividad mental, construyendo los nuevos conocimientos a partir de los antiguos	- Las matemáticas se aprenden por transmisión directa a partir de la explicación del profesor
<i>Organización de la clase</i>	- Los alumnos suelen trabajar en grupo de forma cooperativa. Se favorece la comunicación entre ellos y con el profesor, la puesta en común y el debate	- Los alumnos suelen trabajar individualmente La comunicación se suele dar entre cada alumno y el profesor. A veces se hacen puestas en común.
<i>Concepción de la matemática</i>	- La matemática es un cuerpo dinámico y creciente de conocimientos, una actividad humana, un producto cultural	- La matemática es un cuerpo estático de conocimientos al que se tiene acceso por descubrimiento, no por invención
<i>Materiales curriculares</i>	- Se enriquece el libro de texto con problemas adicionales	- Se sigue de forma más o menos estricta el libro de texto

6. EXPERIMENTACION DE UNA UNIDAD DIDACTICA: ELEMENTOS PARA LA EVALUACION POR PARTE DEL PROFESORADO

1. ¿Han sido **evaluados** todos los objetivos de aprendizaje de los alumnos propuestos en la unidad didáctica al nivel que se deseaba?

En caso de que la respuesta sea negativa hará que diseñar nuevos instrumentos de evaluación.

2. ¿Qué **objetivos** han alcanzado los alumnos y a qué nivel?

Si los alumnos no han alcanzado todos los objetivos previstos al nivel deseado, habrá que tomar alguna(s) de las siguientes opciones: reformular los objetivos; modificar las estrategias didácticas; introducir, modificar o suprimir actividades.

3. La forma de presentar los **contenidos**, ¿ha sido adecuada en relación con los siguientes elementos: el nivel de maduración de los alumnos; su contexto social, económico y cultural; sus intereses y motivaciones?

4. La naturaleza del **material** utilizado (material impreso, recursos audiovisuales, etc.) ¿ha facilitado la comprensión de los contenidos de la unidad didáctica?

5. La **redacción** y la **formulación** de las actividades, ¿han facilitado la comprensión de los alumnos?

6. Las **actividades introductorias**, ¿han sido adecuadas y suficientes para el fin que se perseguía (motivar, repasar, situar el tema, etc.)?

7. Las **actividades de aplicación**, ¿han sido suficientes para facilitar la adquisición de conocimientos?

8. Las **actividades de recapitulación**, ¿han permitido sintetizar los contenidos presentados en la unidad didáctica y tener una idea global de los mismos?

9. El **tiempo** invertido, ¿ha sido suficiente para alcanzar los objetivos deseados?

10. La **organización de la clase**, ¿ha sido adecuada para las estrategias didácticas previstas (exposiciones, trabajo en grupo, puesta en común, debate, etc.)?

11. Las estrategias seleccionadas, los recursos empleados, el enfoque de la unidad didáctica, etc ¿han sido acordes con el estilo de **profesor** y su preparación específica?

7. EVALUACION DE RECURSOS: UNIDADES DIDACTICAS

Visión global

1. La **tipografía**, las **ilustraciones**, las **notaciones** y la **presentación**,
 - ¿están cuidadas?
 - ¿son adecuadas a la edad de los alumnos?
2. ¿Hay un **índice** suficientemente detallado que dé idea de su contenido?
3. ¿Hay referencias a los **programas oficiales**? ¿Son claras estas referencias?
4. ¿Hay una **guía para el profesor** que explicita, entre otros, los siguientes aspectos sobre su utilización?:
 - modelo de enseñanza
 - modo de intervención del profesor
 - estrategias didácticas
 - agrupamiento de los alumnos
 - tipos y modos de evaluación de los aprendizajes
 - temporalización de la unidad didáctica
 - recursos necesarios
5. ¿Hay referencias a la **programación** de cursos anteriores así como a la del propio curso?
6. ¿Hay referencias **bibliográficas** para la ampliación o la profundización científica o didáctica en el tema?

Actividades introductorias

1. ¿Hay **actividades preparatorias** para la introducción de los contenidos de la unidad didáctica?
2. ¿Qué **estrategias didácticas** se utilizan en estas actividades? ¿Son **pertinentes**?
3. ¿Cuál es su **finalidad**?
 - motivar el tema
 - repasar
 - situar el tema en relación a otros ya trabajados
 - poner de manifiesto las ideas y habilidades de los alumnos sobre los aspectos que van a ser trabajados
 - suscitar interrogantes
 - hacer una aproximación histórica al tema
 - otras

Actividades de presentación de los contenidos

1. La **importancia** relativa de las diferentes definiciones y teoremas, ¿está puesta de relieve (recuadros, color, tipografía,...)?

2. Las **demostraciones** de los teoremas aparecen:
 - en el material del alumno (en totalidad o en parte)
 - en otro lugar (en totalidad o en parte)
3. ¿Hay **ejercicios de aplicación** inmediata de las definiciones o los teoremas? 4. La **presentación de los contenidos** se hace:
 - a partir de un conjunto de actividades específicas del alumno
 - a partir de un conjunto de informaciones
 - combinando ambos elementos

Actividades de aplicación de los contenidos

1. ¿Hay **rúbricas** separadas? (resolución de problemas, ejercicios, investigaciones, comentarios de texto, actividades de aplicación, etc)
2. ¿ Hay **clasificación** de las actividades? :
 - según la noción que hay que aplicar
 - según la dificultad
3. ¿ Hay varios **tipos** de estrategias didácticas (ejercicios, problemas, investigaciones, comentarios de texto, experimentaciones, etc)?
4. ¿El **contexto de presentación** de las actividades es suficientemente variado (aspectos de la vida cotidiana, aplicación a otras disciplinas, historia de las matemáticas, situaciones lúdicas)?
5. ¿ Las actividades son **motivadoras** para los alumnos a los que van dirigidas?
6. ¿Hay intención de proporcionar a los alumnos **ideas** potentes en matemáticas, **esquemas** eficaces, modos de **razonamiento**, **métodos** de investigación o de resolución de problemas, mediante ejemplos, investigaciones dirigidas, etc?
7. En relación al trabajo personal, ¿la unidad didáctica permite al alumno **controlar** sus conocimientos?:
 - memorización
 - comprensión
 - aplicación de automatismos
 - desarrollo de destrezas
 ¿De qué forma?:
 - autocontrol (respuesta sin explicación)
 - autoevaluación (respuesta con explicación)
8. ¿Hay actividades de **recuperación**?
9. ¿Hay actividades de **ampliación**?

Actividades de recapitulación

1. ¿Hay **actividades síntesis** que requieren la aplicación de diversas nociones o métodos para su resolución?
2. ¿ Hay **problemas abiertos** (problemas complejos para cuya resolución no se dispone una lista-guia de cuestiones y se necesita determinar los límites dentro de los cuales la solución es válida)?
3. ¿Hay actividades que requieren conocimientos desarrollados en **otras unidades didácticas**?
4. ¿Hay actividades que **relacionan el tema** con otros campos de conocimiento?

Contenido de la unidad didáctica

1. ¿Respeto el **programa oficial**?
2. ¿La **redacción** y la **formulación** de las actividades e informaciones para el alumnado, tienen en cuenta su nivel, sus intereses, motivaciones, su entorno sociocultural?
3. El modo de presentación de los **contenidos**, ¿los hace asequibles al alumnado de acuerdo a su nivel de desarrollo psicoevolutivo?
4. ¿Se favorece en esta unidad didáctica la **actividad matemática**: conjeturar-probar; particularizar-generalizar, modos de razonamiento matemático, etc?
5. ¿Plantea situaciones en **diferentes lenguajes**: numérico, figurativo, gráfico, algebraico?

Referencias bibliográficas

Diseño Curricular Base, Educación Secundaria Obligatoria, M.E.C., Madrid, 1989

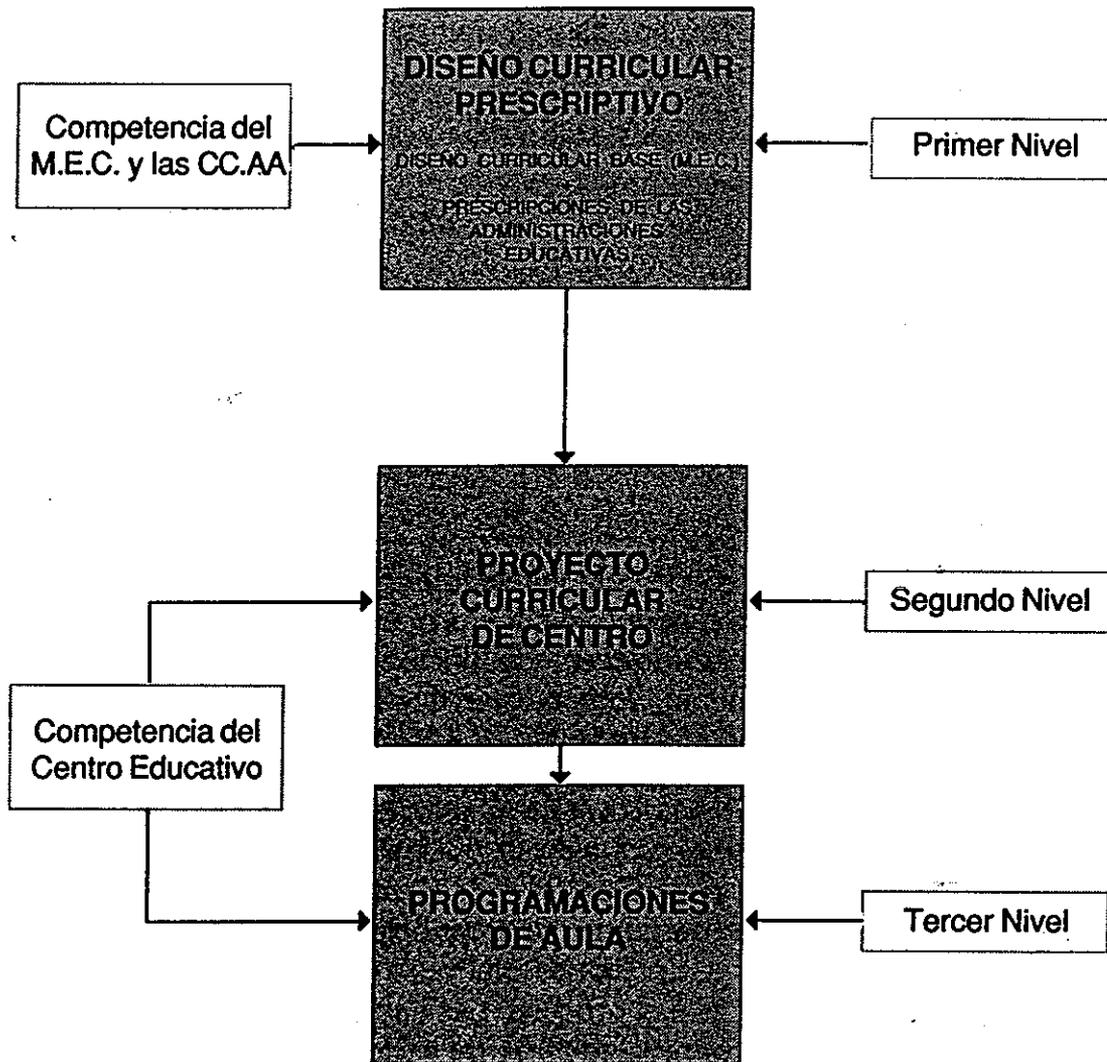
Evaluación del currículum y de los proyectos curriculatos. E. OLIVARES. En: *La enseñanza de las Ciencias en la Educación Intermedia*, R. GUTIERREZ y otros, Rialp, Madrid, 1990, 286-283

La enseñanza de las matemáticas. Proyecto 12-16. M.L. CALLEJO, Narcea, Madrid, 1987

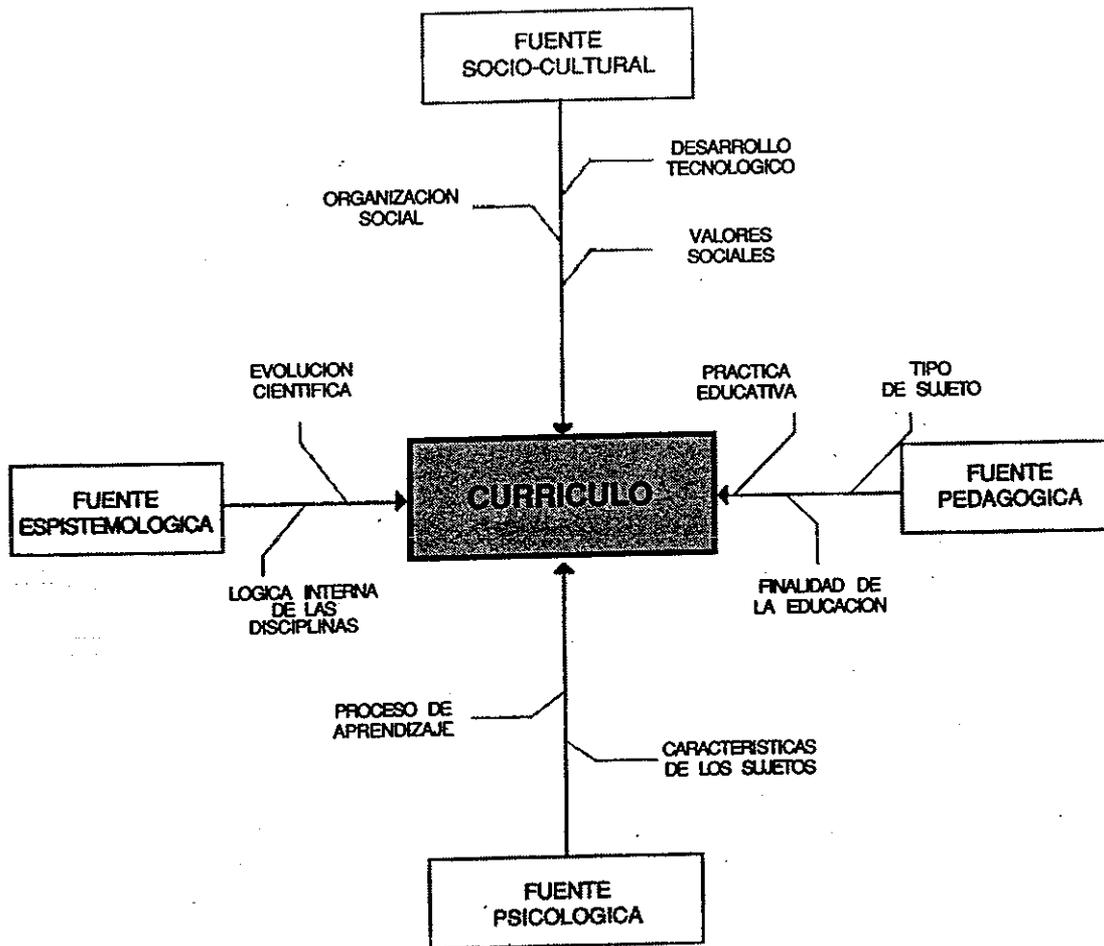
Orientación del trabajo escolar: La Unidad Didáctica, T. SERRANO. En: *La enseñanza de las Ciencias en la Educación Intermedia*, R. GUTIERREZ y otros, Rialp, Madrid, 1990, 158-169

Orientaciones para la elaboración de Unidades Didácticas. Área de Lengua. Documentos IEPS: Monografías. C. BARRIENTOS, (En prensa)

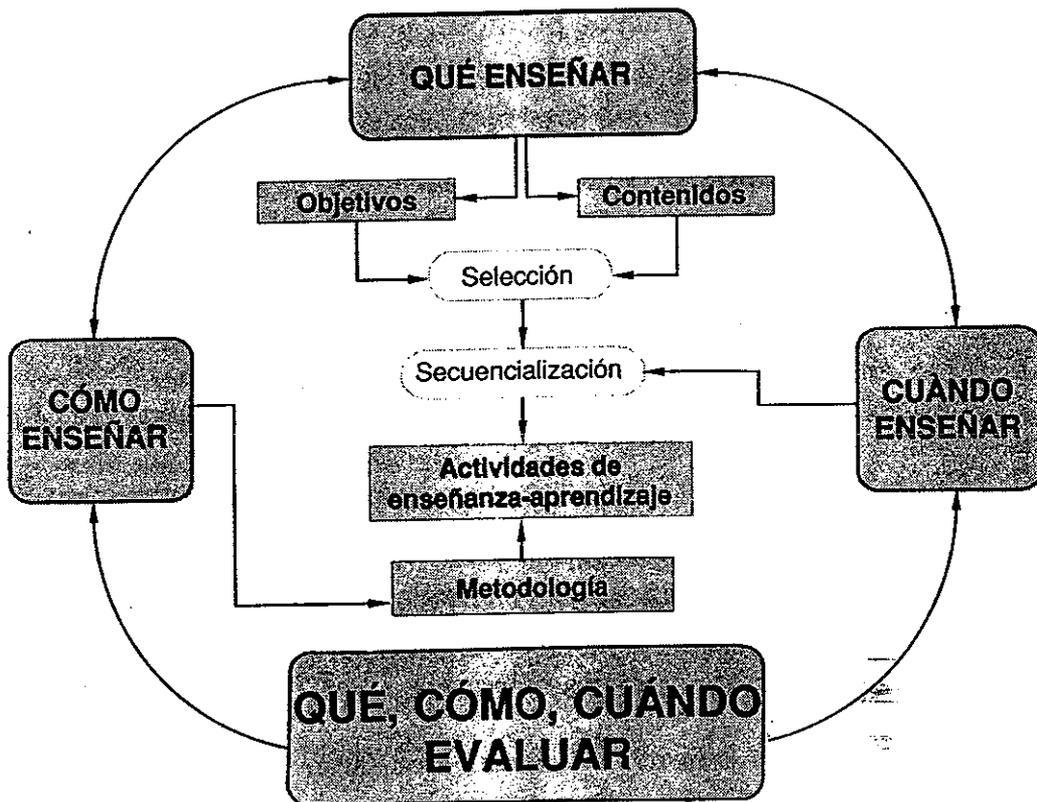
NIVELES DE CONCRECIÓN CURRICULAR



FUENTES DEL CURRÍCULO



ELEMENTOS BASICOS DEL CURRICULO



9. BIBLIOGRAFIA

Reflexiones sobre la matemática

Sigma: El mundo de las matemáticas, J.R. NEWMAN, Grijalbo, Barcelona, 1974 (6 vols.).

La matemática: su contenido, métodos y significado, A.D. ALEKSANDROV y otros, Alianza, Madrid, 1976 (3 vols.).

La experiencia matemática, P. J. DAVIS y R. HERSH, MEC-Labor, Barcelona, 1988.

El sueño de Descartes, P. J. DAVIS y R. HERSH, MEC-Labor, Barcelona, 1989.

El hombre anumérico, J. P. ALLEN, Tusquets, Barcelona, 1990.

Historia de las matemáticas

Historia de las matemáticas, C.B. BOYER, Alianza, Madrid, 1986

Historia de las matemáticas I y II, J.P. COLLETTE, Siglo XXI, Madrid, 1985

Historia de las matemáticas, J.L. CARLAVILLA y G. FERNANDEZ, Consejería de Educación de Castilla la Mancha, Toledo, 1988

Aprendizaje de las matemáticas

Psicología del aprendizaje de las matemáticas, R.SKEMP, Morata, Madrid, 1980.

El aprendizaje de las matemáticas, L. DIKSON, M. BROWN y O. GIBSON, Labor-MEC, Madrid, 1991.

Desarrollo de los conceptos básicos matemáticos y científicos en los niños, K. LOVELL, 3ª edición, Morata, Madrid, 1977.

La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos, L. RESNICK y FORD, Paidós, Barcelona, 1990.

Las matemáticas, cómo se aprenden, cómo se enseñan, G. MIALARET, Visor, Madrid, 1986.

Las matemáticas en la Enseñanza Primaria

Sentido de la matemática en Preescolar y Ciclo Preparatorio, T. CABELLO y P. CELA, Narcea, Madrid, 1985

Aprendizaje de la matemática en el Ciclo Medio, P. CELA y T. CABELLO, Narcea, Madrid, 1982.

Las matemáticas en la Enseñanza Secundaria

La enseñanza de las matemáticas, Proyecto 12-16, M.L.CALLEJO, Narcea, Madrid, 1987.

De 12 a 16, un proyecto de currículum de matemáticas. Grupo CERO, Mestral, Valencia, 1987.

Las matemáticas en la enseñanza secundaria, J. LANGE y otros, ICE de la Univ. de Salamanca, 1989.

En Acción, Matemáticas Ciclo Superior, GRUPO AZARQUIEL, SM, Madrid, 1987 (3 cuadernillos)

Geometría

La geometría en el aprendizaje de las matemáticas, M.L. CALLEJO y M.T. LEBRON, Narcea, Madrid, 1986.

Geometría, Material didáctico, Col. Documentos IEPS, M.L.CALLEJO y M.T. LEBRON, Madrid, 1986.

Geometría intuitiva, E. CASTELNUOVO, Labor, Barcelona, 1966.

Geometría a partir de coordenadas, SCHOOLS COUNCIL, Cecsá, México, 1985.

Invitación a la didáctica de la geometría. C. ALSINA, C. BURGUES y J.M. FORTUNY. Síntesis, Madrid, 1987.

Materiales para construir la geometría. C. ALSINA, C. BURGUES y J.M. FORTUNY, Síntesis, Madrid, 1988.

Números y operaciones

Números y operaciones. E. CASTRO, L. RICO y E. CASTRO, Síntesis, Madrid, 1987.

Números decimales. ¿por qué? y ¿para qué?. J. CENTENO, Síntesis, Madrid, 1988.

Algebra

Ideas y actividades para enseñar algebra. Grupo AZARQUIEL, Síntesis, Madrid, 1991.

Iniciación al álgebra. M. MARTIN, Síntesis, Madrid, 1989.

Magnitudes y medidas

Cómo enseñar las magnitudes, la medida y la proporcionalidad, Cuadernos de matemáticas 1, M.D. de PRADA, Agora, Málaga, 1990.

Proporcionalidad geométrica y ejercicios de medida, GRUPO BETA, ICE de la Univ. de Extremadura, Badajoz, 1985.

El problema de la medida. C. CHAMORRO y J. BELMONTE, Síntesis, Madrid, 1988.

Azar y probabilidad

Azar y probabilidad, J. DIAZ-GODINO y otros, Síntesis, Madrid, 1988.

Probabilidad. A. ENGEL, Mestral, Valencia, 1989.

Probabilidades en la escuela, M. GLAYMANN y T. VARGA, Teide, Barcelona, 1975.

Funciones y gráficas

Las funciones elementales, Materiales para su aprendizaje activo, J.M. MARTINEZ

BLANCO, Teide, Barcelona, 1983 (9 cuadernillos).

El lenguaje de funciones y gráficas, SHELL CENTRE, Librería Arkapa, Bilbao, 1990.

Funciones y gráficas. C. AZCARATE y J. DEULOFEU, Síntesis, Madrid, 1990.

Estadística

Encuestas y precios. A. NORTES CHECA, Síntesis, Madrid, 1987.

Hacer estadística. C. SANCHIS y otros, Alhambra, Madrid, 1986.

Las matemáticas como herramienta

La matemática en la vida cotidiana, H. FREUDENTHAL, Guadarrama, Madrid, 1967.

La mathématique dans la réalité, E. CASTELNUOVO y M. BARRA, Cedec, París, 1980.

Los problemas de Elías (Problemas de matemáticas de la vida cotidiana. Ciclo Superior,

E.G.B.), J. ANTOLIN y otros, Anexos de Educación Abierta n° 46, ICE de la

Univ. de Zaragoza.

De la realidad cotidiana a la matemática real, M.T. LEBRON y M.L. CALLEJO,

Cuadernos de Pedagogía n° 130, 1985, pp. 30-33.

Actividades interdisciplinares Matemáticas-Ciencias Sociales. Ciclo Superior. Material didáctico, Col. Documentos IEPS, M.L. CALLEJO y C. LLOPIS, Madrid, 1985.

Planos y mapas: Actividades interdisciplinares para representar el espacio. Col. Materiales

12-16 para Educación Secundaria 12-16, M.L. CALLEJO y C. LLOPIS, MEC-

Narcea, Madrid, 1992.

Resolución de problemas

a) Planteamientos generales y actividades

Cómo plantear y resolver problemas. G. POLYA. Trillas México, 1972.

Aventuras matemáticas. M. de GUZMAN, Labor, Barcelona, 1986.

Pensar matemáticamente. J. MASON L. BURTON y K. STACEY. Labor-MEC, Barcelona, 1988.

Para pensar mejor. M. de GUZMAN, Labor, Barcelona, 1991.

Guía y juegos para superar bloqueos mentales. J.L. ADAMS. Gedisa

Problemas aritméticos escolares. L. PUIG y F. CERDAN, Síntesis, Madrid, 1988.

Plantear y resolver problemas. L. FERRERO, Alameda, Madrid, 1982.

La enseñanza de la matemática a debate. MEC, Madrid, 1985. (Artículos de A.H. SCHOENFELD: Ideas y tendencias en la resolución de problemas; Sugerencias para la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos)

Educación abierta n° 71. ICE de la Universidad de Zaragoza, 1987. (Artículo de M. de GUZMAN: Enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas)

Currículum de matemáticas y resolución de problemas, M.L. CALLEJO, Suma n° 10, 1992, pp. 25-35.

b) *Experiencias*

De 12 a 16, un proyecto de currículum de matemáticas. Grupo CERO, Mestral, Valencia, 1987.

Didáctica de la resolución de problemas. Grupo DECA. CEP de Burgos, 1990.

La resolución de problemas en un Club matemático. M.L. CALLEJO. Apuntes IEPS n° 53. Narcea, Madrid, 1990.

Los juegos de estrategia en el currículum de matemáticas. I.M. GOMEZ . Apuntes IEPS n° 55. Narcea. Madrid , 1992

Resolución de problemas, M. L. CALLEJO y Col. Cuadernos de Pedagogía n° 202, 1992, pp. 26-30.

c) *Actividades*

Divertimentos matemáticos, Actividades matemáticas, Más actividades matemáticas. B.BOLT, Labor,Barcelona.

Matemáticas recreativas. Y. PERELMAN. Martínez Roca, Barcelona, 1970.

Investigando las matemáticas, R. FISHER y A. VINCE, Akal, Madrid, 1990.

101 Proyectos matemáticos, B. BOLT y D. HOBBS, Labor, Barcelona, 1991.

Se podría completar esta selección con los clásicos de las matemáticas recreativa: M. GARDNER, M. MATAIX, J.P. ALEM y muchos otros.

Calculadoras

Las calculadoras en el aula, R. AGUADO, A. BLANCO y R. ZAMARREÑO, Anaya, Madrid, 1982

La calculadora de bolsillo como instrumento pedagógico. Grupo AZARQUIEL y J. COLERA, ICE U. A. M. Col.: Monografías, 1981

Calculadoras de bolsillo, J.LEWIS, S.M. , Madrid, 1984

Aritmética y calculadoras, F. UDINA, Col.: Matemáticas: cultura y aprendizaje Síntesis, Madrid, 1989.

Usando las calculadoras con niños de 10 años. D. FIELKER, Generalitat Valenciana, Valencia, 1986.

Recursos

Recursos en el aula de matemáticas. F. HERNAN y E. CARRILLO, Síntesis, Madrid, 1988.

El juego y el material didáctico en el aprendizaje de las matemáticas. M.D. de PRADA, M.T. CABELLO y otros

Varios

Las matemáticas sí cuentan. Informe Cockoft. M.E.C., Madrid, 1985.

Didáctica de las matemáticas. A. ORTON, Morata- MEC, Madrid, 1988.

Estandares curriculares y de evaluación para la educación matemática. N.C.T.M., S.A.P.M. Thales, Sevilla, 1991.

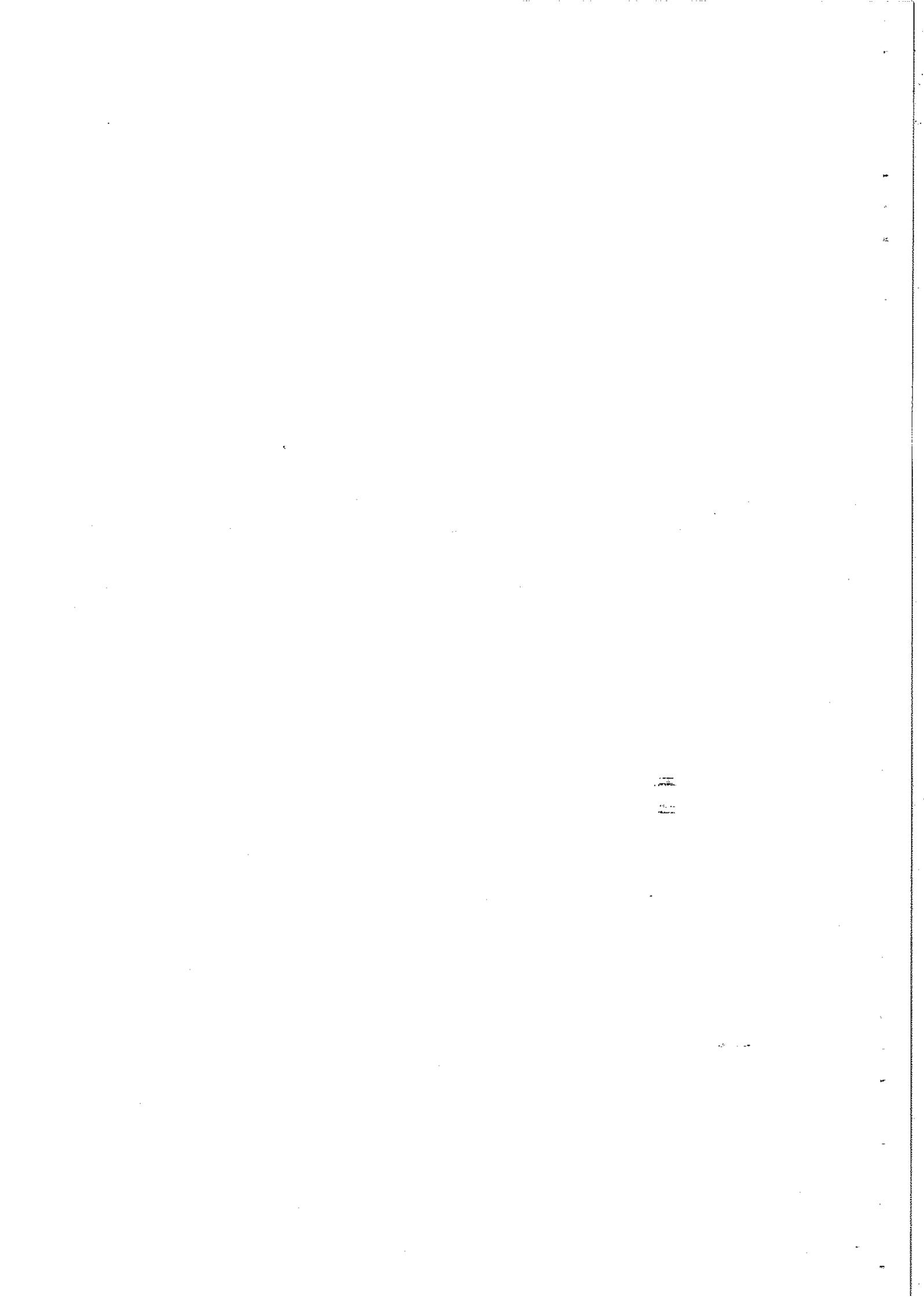
El lenguaje matemático en el aula. D. PIMM, M.E.C.-Morata, Madrid, 1990.

Matemáticas, ¿un nuevo modo de pensar?. M.D. de PRADA y M.J. CORDON, Narcea, Madrid, 1976.

Para más documentación e información:

Colección: Matemáticas: cultura y aprendizaje. Madrid, Síntesis. Diversos temas y autores. 1988-1992.

Se puede consultar una bibliografía más amplia para esta etapa en el capítulo: Guía documental y de recursos de: Matemáticas, Primaria y Secundaria Obligatoria, MEC, Madrid, 1992



UNIDAD DIDACTICA

JUEGOS DE ESTRATEGIA I

PRESENTACION

La Unidad Didáctica "Juegos de Estrategias I" que se presenta a continuación es una propuesta de trabajo para el aula surgida del *Proyecto sobre Resolución de Problemas* llevado a cabo en el Col.legi Pedro Poveda de Palma de Mallorca entre los cursos 1987-1988 y 1990-1991.

Su proceso de elaboración fue el siguiente: se comenzó con la experimentación en las aulas de 1º y 2º curso de Secundaria de un conjunto de actividades de aprendizaje denominadas "Juegos de Estrategia" con la finalidad de introducir a los alumnos en la resolución de problemas matemáticos. Las observaciones directas y las grabaciones en video de algunas sesiones de clase permitieron la reflexión y el diseño acerca de distintos aspectos de la misma: el modo de intervención del profesor, la manera de organizar eficazmente el trabajo en la clase, la duración más apropiada de las sesiones, las secuencias de las actividades de aprendizaje, la articulación de éstas y el modo de evaluar. La explicitación de estas intenciones y las actividades de aprendizaje y de evaluación constituyen esta Unidad Didáctica que estará siempre abierta a posibles adaptaciones y mejoras a partir de la riqueza y de la calidad de las observaciones que se puedan hacer en su puesta en práctica y que permitirán continuar mejorando y enriqueciendo este recurso.

Además de su aplicación del material en las aulas del Col.legi Pedro Poveda, otros profesores de centros de E.G.B. de Bachillerato, de Formación Profesional y de Reforma de la isla de Mallorca y de Madrid capital y provincia lo han puesto en práctica de manera sistemática y crítica. A todos ellos quiero agradecerles su colaboración.

UNIDAD DIDACTICA

JUEGOS DE ESTRATEGIA I

INDICE

Guía del profesor

Introducción
Juegos de estrategia
Finalidades de la unidad didáctica
Contenidos
Estrategia de enseñanza
Agrupamiento de los alumnos
Actividades de aprendizaje
Temporalización
Evaluación de los aprendizajes
Material necesario
Bibliografía

Anexos

Anexo I: Fichas didácticas
Anexo II: Informe sobre la resolución de un problema
Anexo III: Pautas para la resolución de problemas
Anexo IV: Pautas para la evaluación de la resolución de un problema
Anexo V: Cuestionario para la evaluación del trabajo en grupo
Anexo VI: Cuestionario para la evaluación de actitudes hacia las matemáticas

Actividades para el alumnado

INTRODUCCION

Esta unidad didáctica está diseñada para introducir a los alumnos de enseñanza secundaria en la **resolución de problemas**. Con ella se pretende que los estudiantes se familiaricen con esta actividad, lo que les exige invertir esfuerzos, energías y creatividad para tratar de encontrar un camino para llegar a dar respuesta a la cuestión planteada, camino que, por otra parte, no aparece de manera evidente ante sus ojos, pues no disponen de un algoritmo, mecanismo o receta que les conduzca directamente a la solución. Los problemas seleccionados son **juegos de estrategia** para dos jugadores, con una componente lúdica importante, que exigen pocos conocimientos matemáticos y mucho ingenio para tratar de elaborar una estrategia de resolución. Es posible que algunos alumnos puedan abordarlos con espíritu competitivo, lo que no es nuestra intención; muy al contrario, pretendemos que se cree entre los jugadores un espíritu de colaboración para tratar de desentrañar el juego. Si no fuese éste el caso, no consideramos conveniente que se utilicen estas actividades para introducir a los alumnos en la resolución de problemas. Podrían entonces sustituirse los juegos de estrategia por otros problemas de tipo recreativo.

JUEGOS DE ESTRATEGIA

Los juegos de estrategias son juegos en los que, a diferencia de los de azar, los jugadores deben idear estrategias para ganar. En algunos casos uno de los jugadores puede llevar ventaja sobre el otro.

Los juegos de estrategia que componen esta unidad didáctica son para dos jugadores y de dos tipos. En unos se trata de coger objetos dispuestos de diferentes formas; en otros, llamados juegos de posición, se trata de desplazarse en una cuadrícula hacia una meta. Las analogías entre estos problemas son bien de contexto (analogía superficial), bien de reglas del juego (analogía estructural). Las primeras saltan rápidamente a la vista, aunque a veces bloquean la resolución de una variante del problema; las segundas no son fácilmente identificables, pero ayudan a resolver el nuevo problema. En todos ellos uno de los jugadores lleva ventaja sobre el otro.

El objetivo que se persigue al proponerlos es favorecer en el primer ciclo de E.S.O. los aspectos siguientes:

- la resolución de problemas;
- el trabajo en grupo;
- la comunicación de ideas;
- la capacidad de interrogarse sobre nuevas situaciones;

- el contraste de observaciones y conjeturas;
- el registro del proceso de resolución por parte de los jugadores;
- la revisión y la reflexión sobre el proceso de resolución.

FINALIDADES DE LA UNIDAD DIDACTICA

Desde la vertiente cognitiva:

- Ejemplificar los procedimientos heurísticos o estrategias generales para resolver problemas que se especifican a continuación:
 - establecer la analogía o la semejanza entre problemas;
 - empezar por el final o suponer el problema resuelto;
 - resolver primero un problema más sencillo;
 - hacer una representación gráfica.
- Desarrollar procesos propios del pensamiento matemático:
 - particularizar / generalizar;
 - conjeturar / demostrar.

Desde la vertiente actitudinal:

- Favorecer el trabajo en pequeño grupo.
- Favorecer la comunicación en pequeño y en gran grupo.
- Desarrollar en los alumnos una actitud positiva hacia las matemáticas.
- Favorecer en los alumnos la confianza en sus propias capacidades para trabajar la matemática.

CONTENIDOS

Los contenidos desarrollados en esta Unidad Didáctica son de tipo procedimental: se trata de desarrollar las estrategias generales de resolución de problemas y los procesos del pensamiento matemático enumerados en el apartado anterior.

ESTRATEGIA DE ENSEÑANZA

La estrategia didáctica que se sigue en el aula al proponer estos juegos está centrada en la resolución de problemas, en la experimentación, en la comunicación y el contraste de ideas. Para ello se siguen las fases siguientes:

1. **Orientación del trabajo.** En esta fase el profesor presenta la actividad a toda la clase o se la da por escrito a los alumnos y trata de asegurarse de que la han comprendido.

2. **Trabajo en grupo.** Los estudiantes abordan la situación en grupos de dos o de tres. Uno hace de secretario y anota las jugadas y las observaciones que van haciendo los jugadores a lo largo del proceso.

3. **Confrontación de ideas.** Los alumnos discuten sus ideas entre ellos y con el profesor tratando de justificarlas. El profesor invitará a justificar las conjeturas, pondrá contraejemplos, ayudará a desbloquear situaciones y sugerirá generalizaciones.

4. **Puesta en común.** Cuando todos los alumnos se han familiarizado suficientemente con la situación y han llegado a alguna conclusión acerca de la misma, aunque sea incompleta, se tendrá una puesta en común del trabajo realizado. Durante la misma se evitará todo juicio sobre las ideas expuestas, se tratará de entablar un diálogo en el que se haga caer en la cuenta a los alumnos de la validez de las ideas expresadas y se intentará profundizar acerca de los procedimientos utilizados para resolver el problema, aunque éstos hayan resultado infructuosos.

5. **Aplicación.** En esta fase se tratará de aplicar los procedimientos utilizados en la búsqueda de la estrategia ganadora a nuevas situaciones.

AGRUPAMIENTO DE LOS ALUMNNOS

Se pueden seguir dos modos según el número de alumnos por grupo:

1. Formar parejas estables a lo largo del desarrollo de toda la Unidad Didáctica. Estas parejas se pueden formar de distintas maneras: al azar, por decisión de los alumnos o del profesor; en este último caso se pueden seleccionar diversos criterios en cuanto a su composición, por ejemplo, la homeogeneidad o no respecto al rendimiento en matemáticas. Uno de los alumnos hace de secretario y toma nota de las jugadas eligiendo una notación adecuada; si tienen dificultad en encontrar la notación, se la puede sugerir el profesor.

2. Igual que en la modalidad anterior pero en grupos de tres. En este caso dos alumnos juegan y otro hace de secretario. Esta organización es conveniente cuando el número de alumnos es grande, por ejemplo superior a 25 o 30, pues el profesor tendrá que orientar el trabajo de menos grupos.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

Las actividades de aprendizaje y algunas de evaluación de esta unidad didáctica son los ocho juegos de estrategia siguientes:

El juego del 31

La caza cartesiana

Persecución cartesiana

Veneno

Jugando con cerillas

Coge la última

El juego de Nim

Cogiendo monedas

Las fichas didácticas para el profesor están en el anexo I. En ellas se da la solución a los juegos y se sugieren variantes y generalizaciones bajo el epígrafe: *¿Qué sucedería si ...?*

Estas actividades se pueden proponer siguiendo distintas secuencias según las analogías que se quieran establecer entre los problemas a lo largo del proceso didáctico. Por ejemplo:

1) *La caza cartesiana-->Persecución cartesiana-->Jugando con cerillas--> Veneno--> El juego del 31--> Coge la última--> El juego de Nim--> Cogiendo monedas*

2) *El juego del 31-->Veneno--> Jugando con cerillas--> La caza cartesiana--> Persecución cartesiana--> Coge la última--> El juego de Nim--> Cogiendo monedas*

En el primer caso es interesante observar la relación que establecen los alumnos entre *Jugando con cerillas* y *Persecución cartesiana*. Se trata en realidad de dos problemas equivalentes planteados de modos diferentes. En el segundo caso se puede constatar la transferencia que hacen los alumnos de *Veneno* a *Jugando con cerillas*: no se trata ahora de problemas equivalentes aunque lo parezca por el contexto de ambos.

Se pide a los alumnos que redacten un informe retrospectivo de la resolución del problema una vez que hayan llegado a la solución o que se haya dado por concluido el proceso de investigación. No se trata de que redacten la solución sino de que cuenten los incidentes ocurridos en el transcurso del mismo y que habrá anotado el secretario. Por ejemplo las observaciones sobre las jugadas, las conjeturas, las verificaciones, las vías de resolución, los bloqueos y dificultades encontradas, los cambios de rumbo, las

particularizaciones y generalizaciones etc. Damos un ejemplo de informe de dos alumnos en el anexo II.

TEMPORALIZACION

Se puede estimar una duración para esta Unidad Didáctica de 8 o 10 sesiones de 45 minutos a una hora o de 4 o 5 sesiones de 90 minutos a dos horas. Es difícil prever la duración de antemano, pues la resolución de problemas es una actividad abierta que siempre puede dar lugar a la resolución de nuevos problemas, ya sea por analogía o por generalización de los datos o de la cuestión planteada en el problema.

A continuación exponemos las fases de desarrollo de la Unidad Didáctica:

Fase inicial

Se introducirá la unidad didáctica planteando los juegos de estrategias en contraposición a los juegos de azar y poniendo algunos ejemplos de juegos conocidos de este tipo: el ajedrez, el dominó, tres en raya. Se puede jugar con los alumnos al *Tres en raya* con ayuda de un retroproyector o en la pizarra y hacer observaciones acerca del mismo: qué jugador lleva ventaja; cómo debe jugar para ganar siempre; qué variantes se pueden introducir en el juego, etc. Esta fase puede durar una sesión.

Fase de desarrollo

En esta fase se trabajan las actividades anteriores, excepto *Cogiendo monedas*. Estas se pueden plantear en sesiones de una hora. Si algunas parejas terminan antes se les sugieren variaciones del mismo juego para que continúen trabajando; si la mayoría de la clase no ha terminado se pospone la puesta en común para una nueva sesión. En todo caso la puesta en común se deberá hacer cuando todos los grupos hayan llegado a algún resultado acerca de las cuestiones del problema. Esta fase puede durar de 6 a 8 sesiones que se espacian semanalmente.

Fase de recapitulación

En la fase de recapitulación se les propone el problema *Cogiendo monedas* en el que se les pide introducir variantes e inventar nuevos juegos de estrategia a partir de éste en el que cambie la situación inicial, las reglas o la forma de ganar. Esta fase puede durar una sesión.

EVALUACION DE LOS APRENDIZAJES

La evaluación de los aprendizajes se hará atendiendo a la vertiente cognitiva y a la vertiente actitudinal.

Vertiente cognitiva

Para evaluar el aprendizaje se han elegido dos actividades, una para la fase de desarrollo de la unidad didáctica (1a. secuencia: *Jugando con cerillas*; 2a. secuencia: *Persecución cartesiana*) y otra para la fase de recapitulación (*Cogiendo monedas*). En ambos casos se trata de valorar los aspectos siguientes:

- la expresión escrita del proceso de resolución;
- la justificación de ideas;
- los procedimientos empleados;
- la capacidad de introducir variantes o de generalizar a otras situaciones.

Esta evaluación se hará de la siguiente forma: Se propone a los alumnos el juego y se les pide, como siempre, que redacten al final cuál ha sido el proceso seguido hasta llegar al punto en que se encuentran al final de la sesión de evaluación. Dicho informe se valorará siguiendo unas pautas basadas en la metodología que consideramos adecuada para la resolución de problemas (anexo III) y que están en el anexo IV. De esta manera se evalúa a cada pareja y no hay por tanto evaluación individual.

Si se quiere que la evaluación sea individual se puede pedir a los alumnos que trabajen en grupo durante cierto tiempo en la resolución del juego y que luego continúen por separado, redactando cada uno el informe retrospectivo, que se valorará individualmente.

Vertiente actitudinal

Esta evaluación consiste en dos autoevaluaciones, una sobre el trabajo en grupo (anexo V) y otra sobre la actitud hacia las matemáticas (anexo VI). Esta última podría servir también de evaluación sobre el funcionamiento de la propia Unidad Didáctica.

MATERIAL NECESARIO

Hojas fotocopiadas para cada pareja o trío.

Fichas u otros objetos.

Retroproyector (opcional) para la presentación y la puesta en común

BIBLIOGRAFIA

La enseñanza de las matemáticas. Proyecto 12-16. M.L. CALLEJO, Narcea, Madrid, 1987

La resolución de problemas en un Club matemático, Apuntes IEPS n° 53, M.L. CALLEJO, Narcea, Madrid, 1990

Los juegos de estrategia en el curriculum de matemáticas, Apuntes IEPS n° 55, I.M. GOMEZ, Narcea, Madrid, 1992

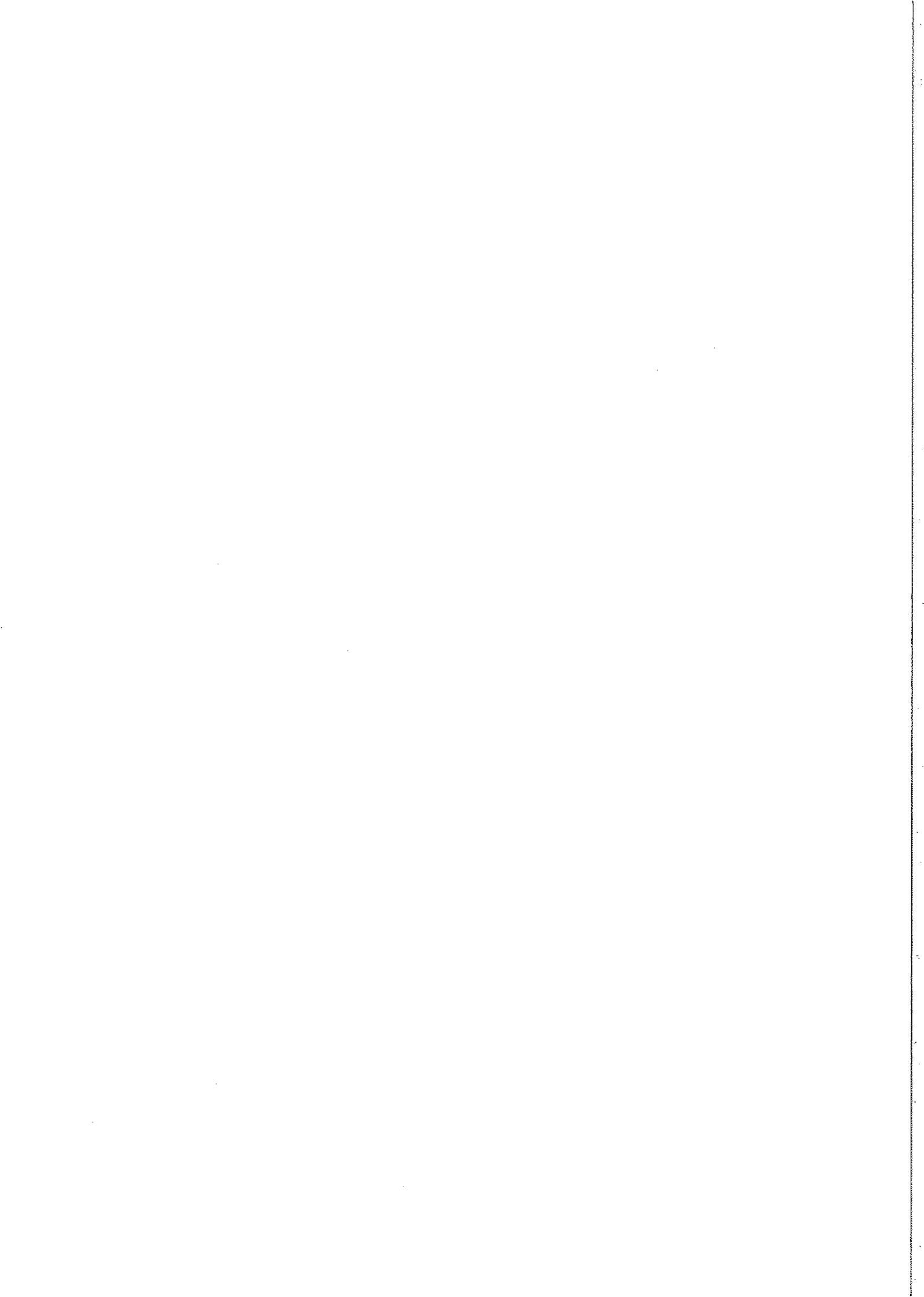
Resolución de problemas, AA.VV. En: Cuadernos de Pedagogía n° 202 (1992), 26-30

Currículum de matemáticas y resolución de problemas, M.L. CALLEJO, En: SUMA, n° 10 (1992)

Actividades matemáticas, B. BOLT, Labor, Barcelona, 1988

Investigando las matemáticas, R. FISHER y A. VINCE, Akal, Madrid, 1989

Cuentos con cuentas, M. de Guzmán, Labor, Barcelona, 1984



ANEXOS

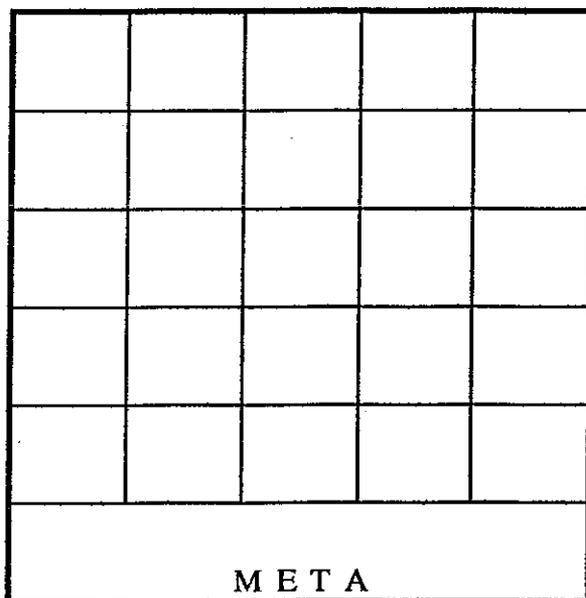
Anexo I: Fichas didácticas

LA CAZA CARTESIANA

Es un juego para dos jugadores.

Se necesita un cuadrícula como la de abajo y un lápiz para señalar en las casillas. Las reglas del juego son las siguientes:

- El jugador que empieza señala una cualquiera de las casillas de la fila de arriba.*
- El otro jugador se desplaza una casilla a la derecha, a izquierda o abajo (nunca en diagonal) de la marca hecha por el primer jugador.*
- A continuación hace lo mismo el primer jugador y siguen jugando por turno.*
- Nunca se puede marcar en una casilla dos veces.*
- El jugador que entre primero en la meta gana*



Solución

Está claro que el jugador que se coloque en la última fila pierde. Para que eso suceda el otro jugador puede obligarle colocándose en las casillas de los extremos o central de la penúltima fila. Dicho jugador se asegura esas posiciones colocándose en las casillas segunda y cuarta de la antepenúltima fila y a su vez se asegura éstas en las posiciones extremas o central de la segunda fila. Por tanto deberá salir de las casillas segunda o cuarta de la fila de arriba. Por tanto se asegura el juego el que empiece si se sitúa en las casillas segunda o cuarta de la primera fila.

¿Tiene éste jugador posibilidad de despistarse en el juego? Si nos imaginamos el tablero coloreado de blanco y negro como un tablero de ajedrez, se puede comprobar que el jugador que empiece en blancas continúa en blancas siempre y el que empiece en negras lo hace siempre en negras, debido a los movimientos permitidos. Por tanto, si en la penúltima fila juega el que lleva ventaja sin pasarse a la última, lo que es posible, ganará seguro, haga lo que haga anteriormente.

Qué pasaría si ...

... el tablero fuese 7 x 7? Se resuelve de la misma manera. También si fuese cuadrado con un número impar cualquiera de casillas.

... el número de casillas fuese par? En este caso el procedimiento de resolución es distinto dado que el eje de simetría del tablero no es una columna de casillas. Si se experimenta con un tablero 2 x 2 gana fácilmente el segundo jugador; en un tablero 4 x 4 se puede observar que el que entra primero en la penúltima fila pierde ya que su contrincante se puede colocar del lado donde hay un número impar de casillas, obligándole a perder entrando primero en la última fila; siguiendo este razonamiento se tiene que el segundo jugador lleva ventaja si se coloca siempre del lado donde el primer jugador deja un número impar de casillas

... el tablero en lugar de ser cuadrado fuese rectangular?

PERSECUCION CARTESIANA

Es un juego para dos jugadores.
Se juega sobre el tablero de abajo. El primer jugador hace una marca en la casilla de SALIDA.
En su turno cada jugador puede hacer una marca en una casilla situada

- directamente encima*
- directamente a la derecha*
- en diagonal (encima y a la derecha)*

de la última marca hecha por su oponente.
Gana el primer jugador que consiga llegar a la META

				META
SAL				

Solución

Podemos señalar las casillas por las que podemos acceder a la meta, empezando por las más próximas:

X		X		META
X		X		X
X		X		X

Por lo tanto el jugador que empieza gana si se coloca en las casillas señaladas.

¿Qué pasaría si ...

..el tablero tuviese otras dimensiones? Se puede resolver este nuevo problema de la misma forma que acabamos de hacer. Por supuesto no siempre lleva ventaja el primer jugador.

JUGANDO CON CERILLAS

Es un juego para dos jugadores.

Sobre una mesa hay dos montones de cerillas, con 5 cerillas cada uno.

Cada jugador, por turno, puede coger una cerilla de un montón o una cerilla de cada montón. Pierde el que coge la última cerilla.

¿Tiene ventaja alguno de los jugadores? Si es así, ¿cómo debe jugar para ganar siempre?

Solución

La primera idea para anotar las jugadas es usar pares que representan las cerillas que quedan en cada montón y un diagrama en árbol en el que van apareciendo las jugadas que se pueden ir haciendo. Pero hay otra forma de representar el problema usando una cuadrícula 5 x 5 en la que se indican las posiciones ganadoras y perdedoras. Esta idea surge de relacionar este juego con "Persecución cartesiana" pues las reglas son equivalentes así como la situación de partida: quitar una cerilla de un montón equivale a colocarse directamente arriba o directamente a la derecha de la posición del otro jugador; coger una cerilla de cada montón equivale a colocarse en diagonal respecto de la posición del otro jugador; la posición de partida es equivalente a tener cinco cerillas en cada montón; la forma de ganar es equivalente a decir que el que llega a la casilla superior derecha pierde. Tenemos entonces la siguiente distribución de posiciones ganadoras y

perdedoras en una cuadrícula 6 x 6 pues ahora hay que considerar también que no quede ninguna cerilla en uno de los montones:

```

G P G P G P
P P P P P G
P G P G P P
P P P P P G
P G P G P P
P P P P P G

```

Las posiciones en las que hay que dejar al contrario los montones para poder ganar son:

{4,4} {4,2} {2,2} {5,0} {3,0} y {1,0}

Por tanto lleva ventaja el primer jugador, que debe empezar cogiendo una cerilla de cada montón y continuar dejando siempre al contrario en alguna de las posiciones indicadas.

¿Qué pasaría si ...

... tuviésemos dos montones con un número distinto de cerillas? Se resuelve de la misma manera en un rectángulo con un número de casillas en cada lado una unidad mayor que el número de cerillas de cada montón.

... ganase el jugador que coge la última cerilla? En este caso procedemos como antes, sabiendo que el que llegue a la casilla (0,0) gana, por tanto las casillas (0,1), (1,0) y (1,1) son ganadoras. Retrocediendo hacia las casillas iniciales se tienen cuales son las posiciones ganadoras.

VENENO

Es un juego para dos jugadores.

Se colocan diez objetos sobre una mesa.

Cada jugador, por turno, puede coger uno o dos objetos. El que coge el último objeto que queda es "VENENO" y pierde.

¿Se te ocurre alguna manera de ganar todas las veces?

¿Tiene algo que ver si empiezas tú o empieza el otro?

¿Qué pasa si se empieza con menos objetos?

¿Y si puedes cogerlos de tres en tres?

Solución

Para ganar siempre hay que dejar sobre la mesa 1, 4, 7 y 10 objetos. Para ello hay que ser segundo y coger 1 objeto si el oponente coge 2 y viceversa.

¿Qué pasaría si...

... guardando las reglas del juego hubiese un número distinto de objetos de objetos sobre la mesa? Puede ganar el primer jugador o el segundo. Eso puede saberse dividiendo el número total de objetos entre 3. Si el resto es cero lleva ventaja el primero,

si no es cero, lleva ventaja el segundo. El número de objetos que hay que dejar sobre la mesa es 1, 4, 7, 10, etc, es decir, éstos números de tres en tres.

... si se pudiesen coger los objetos de tres en tres? Habría que dejar sobre la mesa 1, 5, 9, 13, etc.

Una variación de este juego es:

COGE LA ULTIMA

Colocar sobre la mesa un número determinado de objetos pequeños como fichas y decidir la cantidad máxima que se puede coger cada vez, hasta 10. Dos jugadores van cogiendo las fichas por turno. El que coja la última gana (o pierde: eso hay que decidirlo con antelación). ¿Existe alguna manera de ganar todas las veces?.

EL JUEGO DEL 31

*Es un juego para dos jugadores.
El que empieza dice un número cualquiera del 1 al 5. El otro jugador le suma al número que dijo su oponente un número del 1 al 5 y dice el resultado. Continúan jugando así, por turnos. Gana el que primero diga 31.
¿Tiene ventaja alguno de los jugadores?. ¿Por qué?. Si alguno de los dos lleva ventaja, ¿cómo debe jugar para ganar siempre?*

Solución

El jugador que diga 25 gana pues diga lo que diga el otro, puede decir a continuación 31. El 19 asegura decir 25, el 13 decir 19, el 7 decir 13 y el 1 decir 7. Por tanto gana el primero. Nótese que 1 es el resto de la división de 31 entre 1+5.

¿Qué pasaría si ...

... hubiese que llegar a 100? Se van descontando números de 6 en 6 hasta llegar al menor que se debe decir. Si este número fuese cero, que no es éste el caso, entonces lleva ventaja el segundo jugador diciendo 6.

... se pudiese añadir hasta 10? . Se resuelve igual pero descontando de 11 en 11.

COGIENDO MONEDAS

Se colocan monedas en los vértices de un polígono regular. Dos jugadores cogen alternativamente una o dos monedas. En este último caso deben estar situadas en vértices consecutivos. Gana el que se lleva la última moneda. ¿Cuál es la estrategia ganadora?

Si no podeis resolver este problema, resolver otro más sencillo.

Inventar nuevos juegos a partir de éste y dar la solución.

Solución

Para ganar hay que dejar al oponente que empiece y jugar de manera simétrica, es decir, coger las monedas que están en el o los vértices opuestos a la o las que coja el otro jugador, así podremos coger la última moneda. Si el número inicial de monedas es par, se cogen las mismas monedas que el oponente, pero si es impar hay que coger una más o una menos de las que coja.

Anexo II: Informe de dos alumnos de Séptimo de E.G.B. sobre la resolución del Juego del 31.

" La primera vez que jugamos nos dimos cuenta que no iba a ser fácil, tuvimos que jugar muchas veces hasta descubrir que el primer número clave era el 25. Luego nos pusimos a pensar por qué el que decía 25 ganaba, y como $31-25$ son 6, pensamos quitarle 6 a 25, y así otra y así otra hasta que dimos con todos los números clave.

Nos dimos cuenta que como los dos sabíamos los números clave quien empezaba ganaba, porque al saberlo nos llevábamos uno a otro a los números clave. El primero que decía uno de ellos ganaba.

Los números clave son: 1, 7, 13, 19 y 25.

Después nos dimos cuenta que no solo con pensar del 1 al 5 iban a salir otras claves, sino con cualquier número que fuera de tope por ejemplo del 1 al 9, le sumábamos 1 en este caso al 9 y le restábamos al número que nos habían dado, por ejemplo 31, y iban saliendo los números clave. Esto ocurría con cualquier número. La fórmula que hemos sacado para esto es:

$a \rightarrow$ número tope para pensar $\rightarrow 1 \rightarrow 5$

$N \rightarrow$ número dado $\rightarrow 31$

B,C,D,F,G,H, etc. \rightarrow claves de los números

$$N - (1 + a) = B$$

$$31 - (1 + 5) = 25$$

$$N - 2(1 + a) = C$$

$$31 - 2(1 + 5) = 19$$

$$N - 3(1 + a) = D$$

$$31 - 3(1 + 5) = 13$$

$$N - 4(1 + a) = F$$

$$31 - 4(1 + 5) = 7$$

$$N - 5(1 + a) = G$$

$$31 - 5(1 + 5) = 1$$

$$N - 6(1 + a) = H$$

Así hasta que se dieran con todas las claves.

Nos dimos cuenta que si dividíamos el número dado entre el número tope, de cociente nos daba el número de números clave:

$$1 + 5 = 6$$

$$31 : 6 = 5 \text{ (números clave) y resto } 1$$

PAUTAS PARA LA RESOLUCION DE PROBLEMAS

Primera fase. TRATA DE COMPRENDER EL ENUNCIADO

- Lee el problema despacio.
- Trata de entender todas las palabras.
- Distingue los datos del problema (lo que conoces) de la incógnita (lo que buscas).
- Trata de ver la relación entre los datos y la incógnita.
- Intenta expresar el problema con tus propias palabras.

Segunda fase. INTENTA COMPRENDER EL PROBLEMA

- Si puedes haz un dibujo o un esquema de la situación.
- Si los datos del problema no son cantidades muy grandes, intenta expresar la situación jugando con objetos (fichas, botones, papel...)
- Si las cantidades que aparecen en el enunciado son grandes, entonces imagínate el mismo problema con cantidades más pequeñas y haz como dice el punto anterior.
- Si el problema está planteado de forma general, da valores concretos a los datos y trabaja con ellos.

Tercera fase. BUSCA UNAS CUANTAS ESTRATEGIAS PARA SOLUCIONAR EL PROBLEMA

La siguiente lista te puede ayudar.

- ¿Es semejante a otros problemas que ya conoces? ¿Cómo se resuelven éstos? ¿Alguna idea te podría servir?
- Imagínate un problema más fácil para empezar y así animarte.
- Experimenta con casos particulares, ¿te dan alguna pista sobre la posible solución?
- ¿Puedes ayudarte de un dibujo o de una representación gráfica?
- ¿Puedes elegir una buena notación para pasar del lenguaje natural al lenguaje matemático?

- Supón el problema resuelto, ¿Cómo se relaciona la situación de partida con la situación final?

- Imagínate lo contrario a lo que quieres demostrar, ¿Llegas a alguna contradicción?

- ¿El problema presenta alguna simetría o regularidad? ¿Podemos usar algunos "trucos matemáticos": principio del palomar, descenso al infinito...?

- ¿Será el caso general más sencillo que éste particular?

Cuarta fase. SELECCIONA UNA DE LAS ESTRATEGIAS Y TRABAJA CON ELLA

- No te arregues fácilmente.

- No te emperres con esta estrategia. Si ves que no conduce a nada, déjala.

- Si la estrategia que elegiste no va bien acude a otra de las estrategias que seleccionaste o a una combinación de ellas.

- Trata de llegar hasta el final.

Quinta fase. REFLEXIONA SOBRE EL PROCESO SEGUIDO

- ¿Cómo ha sido el camino? ¿Dónde te atascaste?

- ¿En qué momento y cómo has salido de los atascos?

- ¿Cuáles han sido los momentos de cambio de rumbo? ¿Han sido acertados?

- ¿Entiendes bien tu solución? ¿Entiendes por qué marcha? ¿Tiene sentido esta solución o es absurda?

- ¿Sabes hacerlo ahora de manera más sencilla?

- ¿Sabes aplicar el método empleado a casos más generales?

- ¿Puedes resolver otras situaciones relacionadas con el tema que sean interesantes?

- ¿Cuál ha sido la tendencia de tu pensamiento?: visual, analítica, lenta, rápida, segura, dudosa, variada, monótona...?

RECUERDA: LO QUE IMPORTA ES EL CAMINO

(Adaptado de: *Aventuras matemáticas*, M. de Guzmán, Labor, Barcelona, 1986)

Anexo V: Cuestionario para la evaluación del trabajo en grupo

Nombre
Curso Fecha

1. Cómo te sientes del trabajo que has realizado en grupo a lo largo de la unidad didáctica
 Muy satisfecho Satisfecho Insatisfecho Muy insatisfecho

2. Comenta brevemente por qué te sientes así

3. En qué medida crees que has estado prestando atención a las ideas de tus compañeros
 Del todo Bastante Poco Apenas

4. Comenta brevemente tu respuesta

5. Qué obstáculos crees que impiden o dificultan una mejor comunicación o una mayor eficacia en tu grupo. Enumera las que creas más importantes (Por ejemplo: objetivo de la tarea poco definido; falta de planificación; monopolización de la palabra o de la actividad; inhibición, etc.)

6. Cuando hayas respondido a todas las preguntas, coméntalas con tus compañeros de grupo y procurad entre todos llegar a alguna conclusión que permita al grupo funcionar mejor. Escríbela a continuación.

Anexo VI : Cuestionario para la evaluación de actitudes hacia las matemáticas

Nombre
Curso Fecha

1. Escribe lo que consideres más importante de lo que has aprendido de matemáticas en esta unidad didáctica

2. Describe algún problema o tipo de problemas con el que hayas tenido alguna dificultad

3. Qué te parece que se podría hacer para ayudarte a salir de ella

4. Cómo te has sentido resolviendo los problemas propuestos (Señala todas aquellas respuestas que lo expresen)

Interesado	Relajado	Preocupado
Triunfador	Confundido	Ansioso
Feliz	Aburrido	

Añade un calificativo más distinto de los anteriores

5.Cuál es tu mayor preocupación en estos momentos cuando resuelves problemas de matemáticas

6. Da algunas ideas para mejorar la clase de matemáticas

ACTIVIDADES PARA EL ALUMNO

Equipo _____ Curso _____

LA CAZA CARTESIANA

Es un juego para dos jugadores.

Se necesita un cuadrícula como la de abajo y un lápiz para señalar en las casillas. Las reglas del juego son las siguientes:

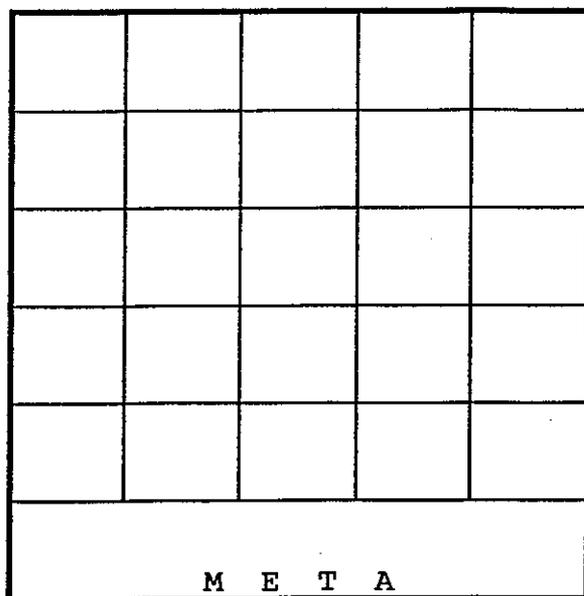
- El jugador que empieza señala una cualquiera de las casillas de la fila de arriba.

- El otro jugador se desplaza una casilla a la derecha, a izquierda o abajo (nunca en diagonal) de la marca hecha por el primer jugador.

- A continuación hace lo mismo el primer jugador y siguen jugando por turno.

- Nunca se puede marcar en una casilla dos veces.

- El jugador que entre primero en la meta gana



Equipo _____ Curso _____

PERSECUCION CARTESIANA

Es un juego para dos jugadores.

Se juega sobre el tablero de abajo. El primer jugador hace una marca en la casilla de SALIDA.

En su turno cada jugador puede hacer una marca en una casilla situada

- directamente encima
- directamente a la derecha
- en diagonal (encima y a la derecha)

de la última marca hecha por su oponente.

Gana el primer jugador que consiga llegar a la META

				META
SALI- DA				

Equipo _____ Curso _____

JUGANDO CON CERILLAS

Es un juego para dos jugadores.

Sobre una mesa hay dos montones de cerillas, con 5 cerillas cada uno.

Cada jugador, por turno, puede coger una cerilla de un montón o una cerilla de cada montón. Pierde el que coge la última cerilla.

¿Tiene ventaja alguno de los jugadores? Si es así, ¿cómo debe jugar para ganar siempre?

Equipo _____ Curso _____

VENENO

Es un juego para dos jugadores.

Se colocan diez objetos sobre una mesa.

Cada jugador, por turno, puede coger uno o dos objetos.

El que coge el último objeto que queda es "VENENO" y pierde.

¿Se te ocurre alguna manera de ganar todas las veces?

¿Tiene algo que ver si empiezas tú o empieza el otro?

¿Qué pasa si se empieza con menos objetos?

¿Y si puedes cogerlos de tres en tres?

Equipo _____ Curso _____

EL JUEGO DEL 31

Es un juego para dos jugadores.

El que empieza dice un número cualquiera del 1 al 5. El otro jugador le suma al número que dijo su oponente un número del 1 al 5 y dice el resultado. Continúan jugando así, por turnos. Gana el que primero diga 31.

¿Tiene ventaja alguno de los jugadores?. ¿Por qué?. Si alguno de los dos lleva ventaja, ¿cómo debe jugar para ganar siempre?

Equipo _____ Curso _____

COGE LA ULTIMA

Colocar sobre la mesa un número determinado de objetos pequeños como fichas y decidir la cantidad máxima que se puede coger cada vez, hasta 10. Dos jugadores van cogiendo las fichas por turno. El que coja la última gana (o pierde: eso hay que decidirlo con antelación). ¿Existe alguna manera de ganar todas las veces?.

Equipo _____ Curso _____

EL JUEGO DE NIM

Es un juego para dos jugadores.

El juego de Nim se puede jugar partiendo de esta formación:

```
      .  
     . . .  
    . . . . .  
   . . . . . . .
```

Los jugadores van cogiendo por turno un objeto, o más, de cualquier fila y el ganador (o el perdedor) es el que coge el último. Buscar tácticas para ganar. ¿Qué variantes se pueden introducir?. ¿Cómo se puede registrar las jugadas que se van haciendo?.

Equipo _____ Curso _____

COGIENDO MONEDAS

Se colocan monedas en los vértices de un polígono regular. Dos jugadores cogen alternativamente una o dos monedas. En este último caso deben estar situadas en vértices consecutivos. Gana el que se lleva la última moneda. ¿Cuál es la estrategia ganadora?

Si no podeis resolver este problema, resolver otro más sencillo.

Inventar nuevos juegos a partir de éste y dar la solución.



i.e.p.s.

instituto de estudios
pedagógicos somosaguas

Vizconde de Matamala 3
28028 MADRID